Monte-Carlo Simulation mit dem Tool MC-ECO anhand des Beispiels Maschinen-Ausfälle

Herausgeber

ESG Consulting GmbH
Livry-Gargan-Straße 6
82256 Fürstenfeldbruck

Autor

Dr. Peter Merz
peter.merz@esg-consulting.com

Kontakte

Matthias Reimann
Tel.: +49 (0)89 92161-2802
E-Mail: matthias.reimann@esg-consulting.com

Ulrich Bethäuser
Tel.: +49 (0)89 92161-2517
E-Mail: ulrich.bethaeuser@esg-consulting.com

Inhalt

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1. Einleitung

Mit diesem Dokument sollen verschiedene, sehr einfache Simulationen von Maschinen-Ausfällen demonstriert werden. Hierzu werden die Schadenanzahlen mit Hilfe des Bernoulli-Prozesses und der Binomial-Verteilung sowie die Poisson-Verteilungen herangezogen.

Betrachtet werden soll im Folgenden eine Gesamtheit gleichartiger Risiken (oder äquivalent eine Risikoquelle mit der Möglichkeit mehrerer Schadenfälle) im Zeitverlauf. Neben der Schadenhöhe X eines Einzelschadens sind in der Risikomodellierung Informationen über die Anzahl $N(t)$ der Schäden in einem Zeitraum der Länge t wichtig.

In einem ersten Schritt wird man versuchen, die Zufallsvariable „Schadenanzahl" durch eine typische *Schadenanzahlverteilung* für einen Zeitraum vorgegebener Länge (z.B. 12 Monate) zu beschreiben. Anschließend wird man in der Regel auch nach dem passenden Verteilungsmodell für Zeiträume beliebiger Länge suchen.

Noch allgemeiner ist die Modellierung durch einen stochastischen *Schadenanzahlprozess*, bei dem zusätzlich noch gewisse Regeln für die mögliche Abfolge von Schadenfällen im Zeitverlauf aufgestellt werden; d.h. die Schadenanzahlverteilung für zukünftige Zeiträume wird in Abhängigkeit von den zuvor eingetretenen Schadenfällen modelliert (im Sinne bedingter Wahrscheinlichkeiten).

2. Bernoulli-Prozess und Binomialverteilung

Bei einem *Bernoulli-Prozess* geht man davon aus, dass ein interessierendes Ereignis, im vorliegenden Kontext ein Schadenfall, in einem Zeitraum der Länge 1 (z.B. 1 Tag, 1 Monat, 1 Jahr) höchstens einmal auftreten kann, und zwar mit konstanter Wahrscheinlichkeit p; d.h. **die Eintrittswahrscheinlichkeit hängt nicht von der Vergangenheit ab**.

Für die Schadenanzahl $N(t)$ nach t Zeitperioden ergibt sich somit eine Binomial-Verteilung

$$N(t) \sim \mathbf{Bin}(t; p).$$

Für die Wahrscheinlichkeit von n Schäden in einem Zeitintervall der Länge t gilt also

$$P(N(t) = n) =: p_n(t) = \left(\frac{t}{b}\right) * p^n * (1 - p)^{t-n}$$

Für zwei unabhängige Einzelverteilungen gilt:

$$N_i \sim \mathbf{Bin}(t_i; p) \ (i = 1, 2) \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 \sim \mathbf{Bin}(t_1 + t_{2i}; p)$$

d.h. fasst man zwei Zeitperioden t_1 und t_2 mit identischer Schadeneintrittswahrscheinlichkeit p zusammen, so erhält man unter der Annahme der Unabhängigkeit der Zeitperioden für den Gesamtzeitraum $t_1 + t_2$ wieder eine Binomial-Verteilung mit Parameter p. Es wird also vorausgesetzt, dass die Schäden in t_1 nicht die in t_2 beeinflussen, wie es etwa bei Ansteckungsprozessen der Fall wäre.

Betrachtet man also nur Zeiträume der Länge 1, erkennt man, dass die binomialverteilte Zufallsvariable *N(t)* als Summe von *t* unabhängigen 0-1-Größen N_i mit $P(N_i = 1) = p$, $P(N_i = 0) = 1 – p$, d.h. N_i ~ **Bin**(1; *p*) (sog. *Bernoulli-Verteilung*), erzeugt werden kann.

Für Erwartungswert und Varianz der Schadenanzahl ergibt sich

$$\mathbf{E}(N(t)) = t * p;$$

$$\mathbf{Var}(N(t)) = t * p * (1 – p);$$

Dieses Vorgehensmodell ist für kleine und homogene Bestände von Risiken geeignet und wird z.B. in der Lebensversicherung verwendet. Bei größeren Beständen arbeitet man in der Regel mit einer Poisson-Verteilung, die sich formal aus der Binomial-Verteilung unter der Voraussetzung

$$\lambda = t * p = const. \text{ für } t \rightarrow \infty$$

ergibt.

Abbildung 1 zeigt alle möglichen Pfade eines Bernoulli-Prozesses für 12 Zeitperioden. Es wird also unter der Modell-Annahme des Bernoulli-Prozesses, dass in jeder Zeitperiode nur maximal 1 Schaden möglich ist, zu den Zeitpunkten *t* = 0, 1,…12 die jeweils mögliche Schadenanzahl dargestellt. Ein einzelner Pfad gibt eine konkrete der verschiedenen möglichen Schadenanzahl-Entwicklungen an. Ein waagrechter Stricht ist so zu interpretieren, dass im entsprechenden Zeitintervall kein Schaden auftritt; alternativ kann die Schadenanzahl pro Zeitperiode um genau 1 zunehmen.

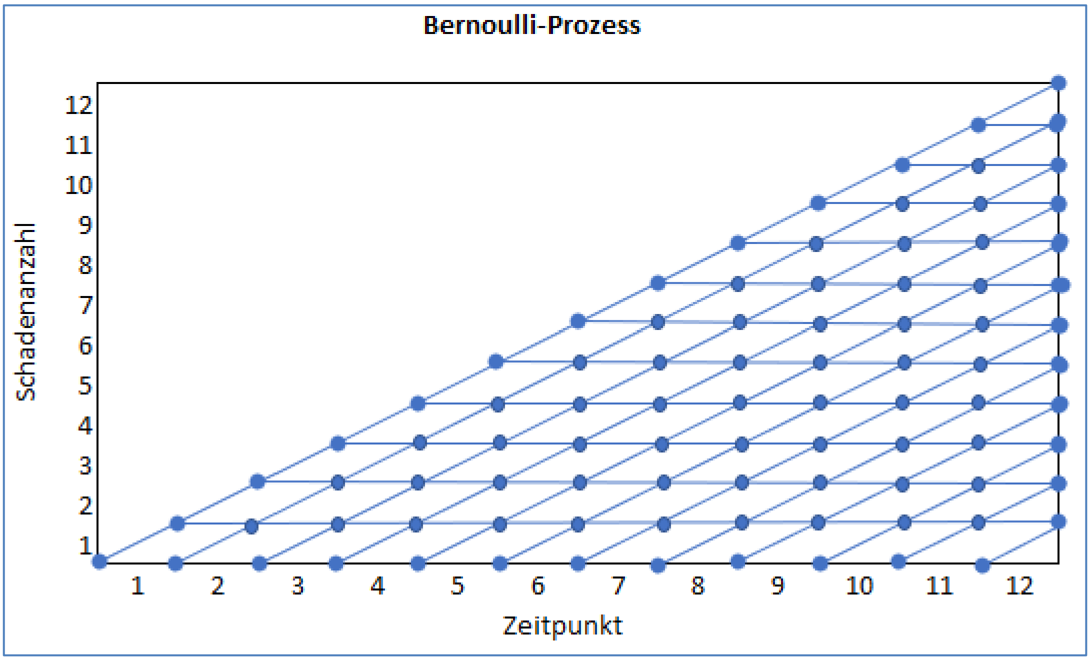


Abbildung 1: Mögliche Entwicklung einer Schadenanzahl über 12 Zeitperioden bei einem Bernoulli-Prozess

Ein konkreter Pfad kann dann also beispielsweise so aussehen, wie in Abbildung 2 dargestellt. Zu einem konkreten Zeitpunkt erhält man die Binomial-Verteilung mit den Wahrscheinlichkeiten $P(N(t) = n) = p_n(t)$ für die möglichen Schadenanzahlen $n = 0, 1, 2,\ldots t$.

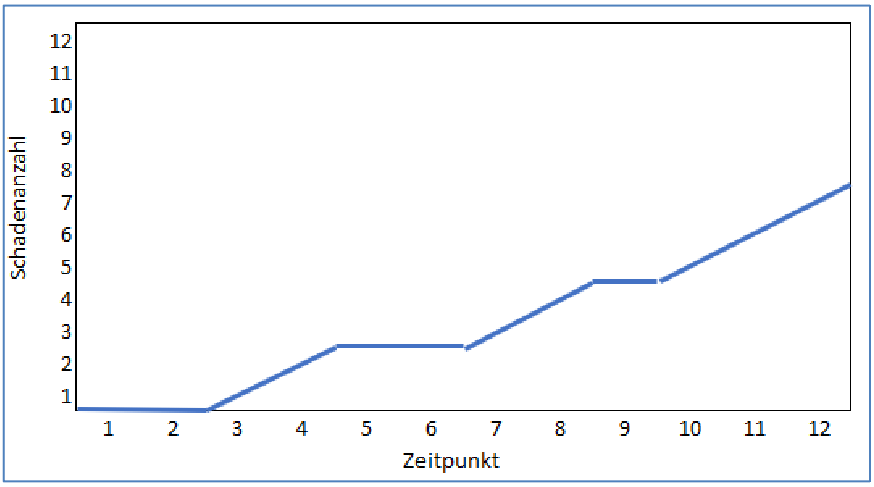


Abbildung 2: Eine Realisierung des Bernoulli-Prozesses

2.1 Beispiel Binomial-Schadenverteilung 1 (1 Maschine, mehrere Zeitperioden)

Ein Betrieb setzt in seiner Produktion eine Maschine ein, die in einem einzelnen Monat mit Wahrscheinlichkeit $p = 10\% = 0{,}1$ einen Schaden hat und repariert werden muss. Vereinfachend sei angenommen, dass pro Monat lediglich ein Schaden auftreten kann und dass das Auftreten eines Schadens in den einzelnen Zeitperioden unabhängig voneinander ist. Der konkrete Pfad kann entspr. Abbildung 2 also so interpretiert werden, dass in den ersten 2 Monaten kein Schaden auftritt, im dritten und im vierten Monat ein Schaden auftritt, dann wieder zwei Monate kein Schaden usw. Ferner ergibt sich also für die mögliche Schadenanzahl (Reparaturfälle an der Maschine) nach 6 Monaten die in Tabelle 1 erfasste Wahrscheinlichkeitsverteilung, die in Abbildung 4 auch graphisch dargestellt ist.

Schadenanzahl	Wahrscheinlichkeit
0	$\binom{6}{0} * 0{,}1^0 * 0{,}9^6$ = 0,531441
1	$\binom{6}{1} * 0{,}1^1 * 0{,}9^5$ = 0,354294
2	$\binom{6}{2} * 0{,}1^2 * 0{,}9^4$ = 0,098415
3	$\binom{6}{3} * 0{,}1^3 * 0{,}9^3$ = 0,014580
4	$\binom{6}{4} * 0{,}1^4 * 0{,}9^2$ = 0,001215
5	$\binom{6}{5} * 0{,}1^5 * 0{,}9^1$ = 0,000054
6	$\binom{6}{6} * 0{,}1^6 * 0{,}9^0$ = 0,000001

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schadenanzahl

Modellierung mit MC-ECO (Risiko 1 im Szenario MaschinenSchaden.xlsx):

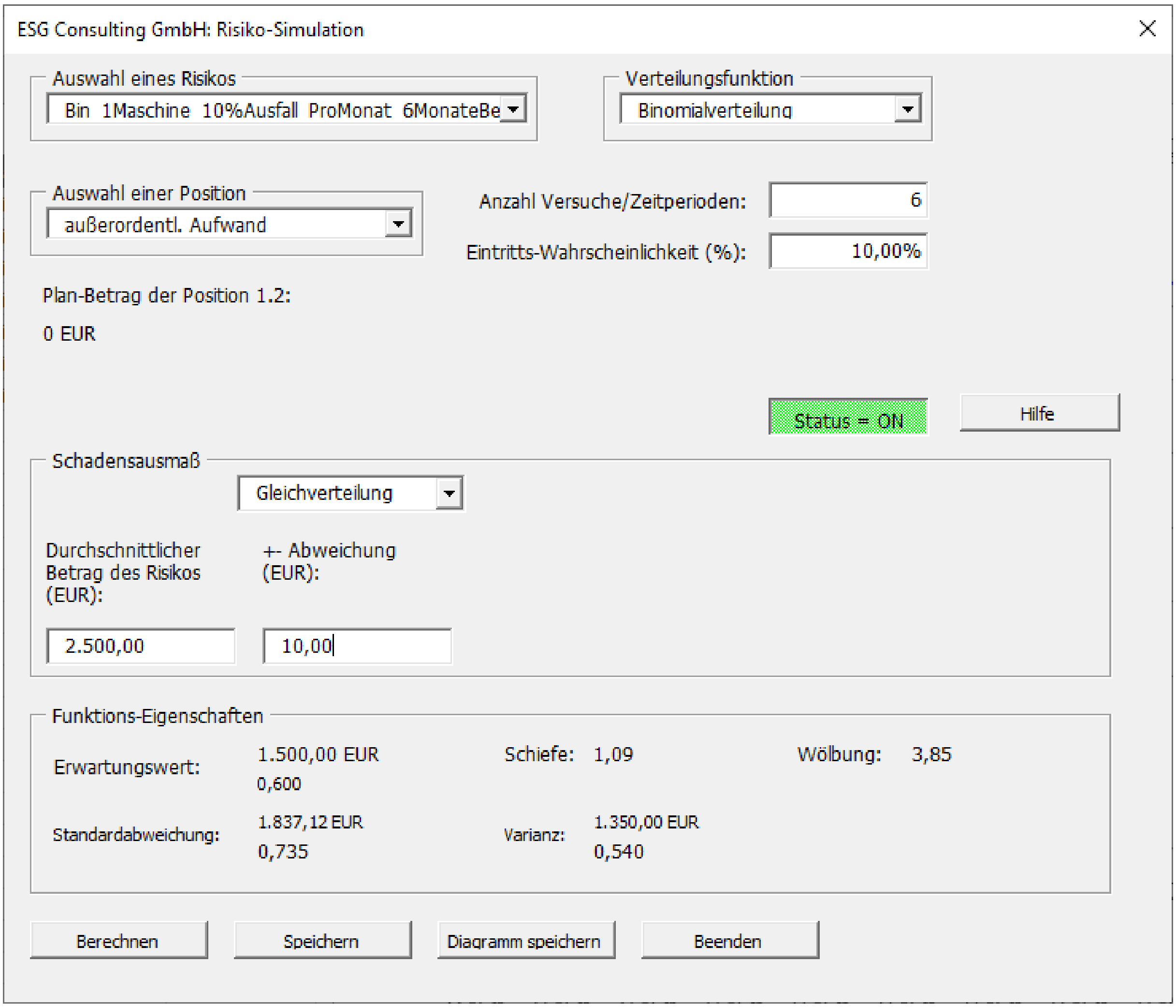


Abbildung 3: Risiko-Modellierung mit MC-ECO

Dieses Risiko soll nun mit MC-ECO modelliert werden. Die Eingabe-Parameter sind:

- Verteilungsfunktion: Binomial-Verteilung
- Eintritts-Wahrscheinlichkeit pro Monat: 10%
- Zeitperiode: 6 Monate
- Schadensausmaß pro Maschinenausfall: Gleichverteilung mit 2.500 EUR ± 500 EUR

Der Erwartungswert **E**($N(t)$) = $t * p$ = 6 * 0,1 = 0,6 entspr. 2.500 EUR * 0,6 = 1.500 EUR

Die Varianz **Var**($N(t)$) = $t * p * (1 – p)$ = 6 * 0,1 * (1 – 0,1) = 0,6 * 0,9 = 0,54

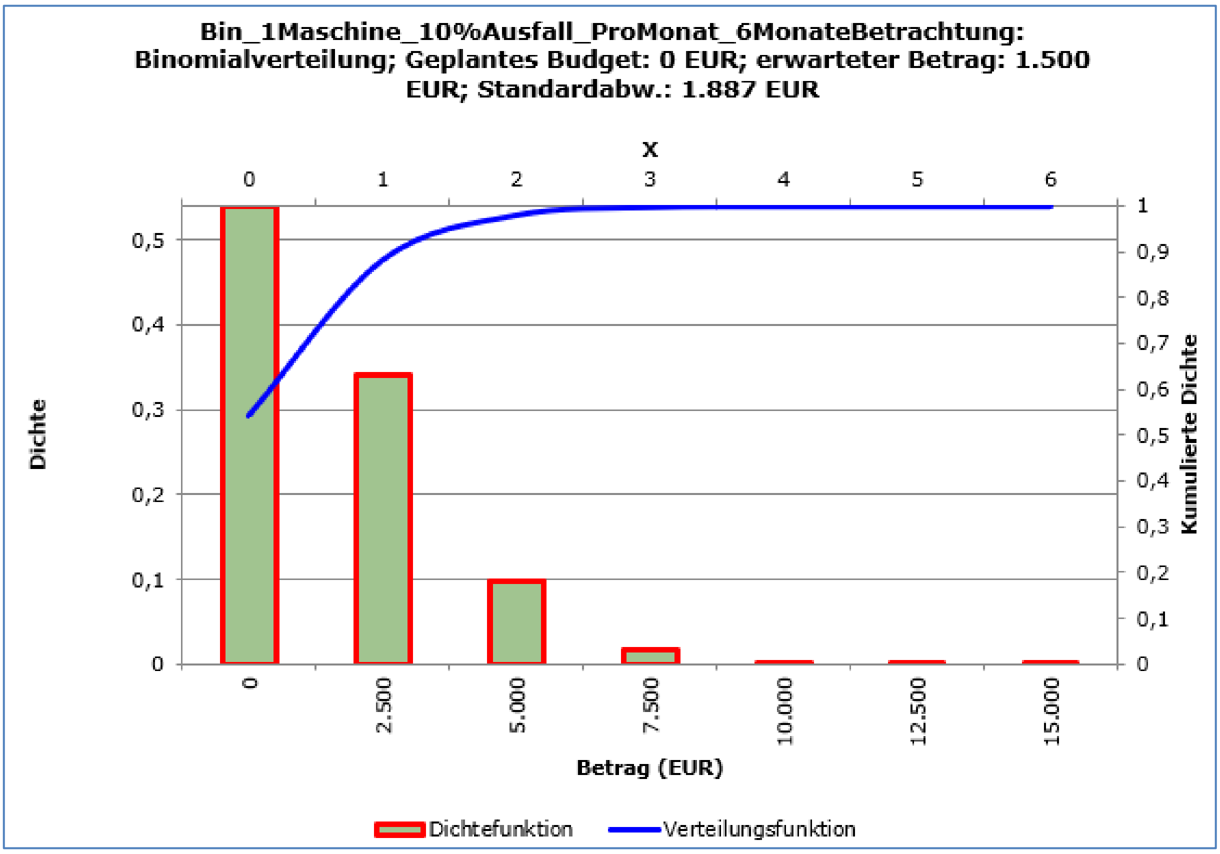


*Abbildung 4: Zähldichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von **Bin**(6; 0,1)*

Bei einer Zeitperiode von 12 Monaten ergäbe sich (Risiko 2 im Szenario MaschinenSchaden.xlsx):

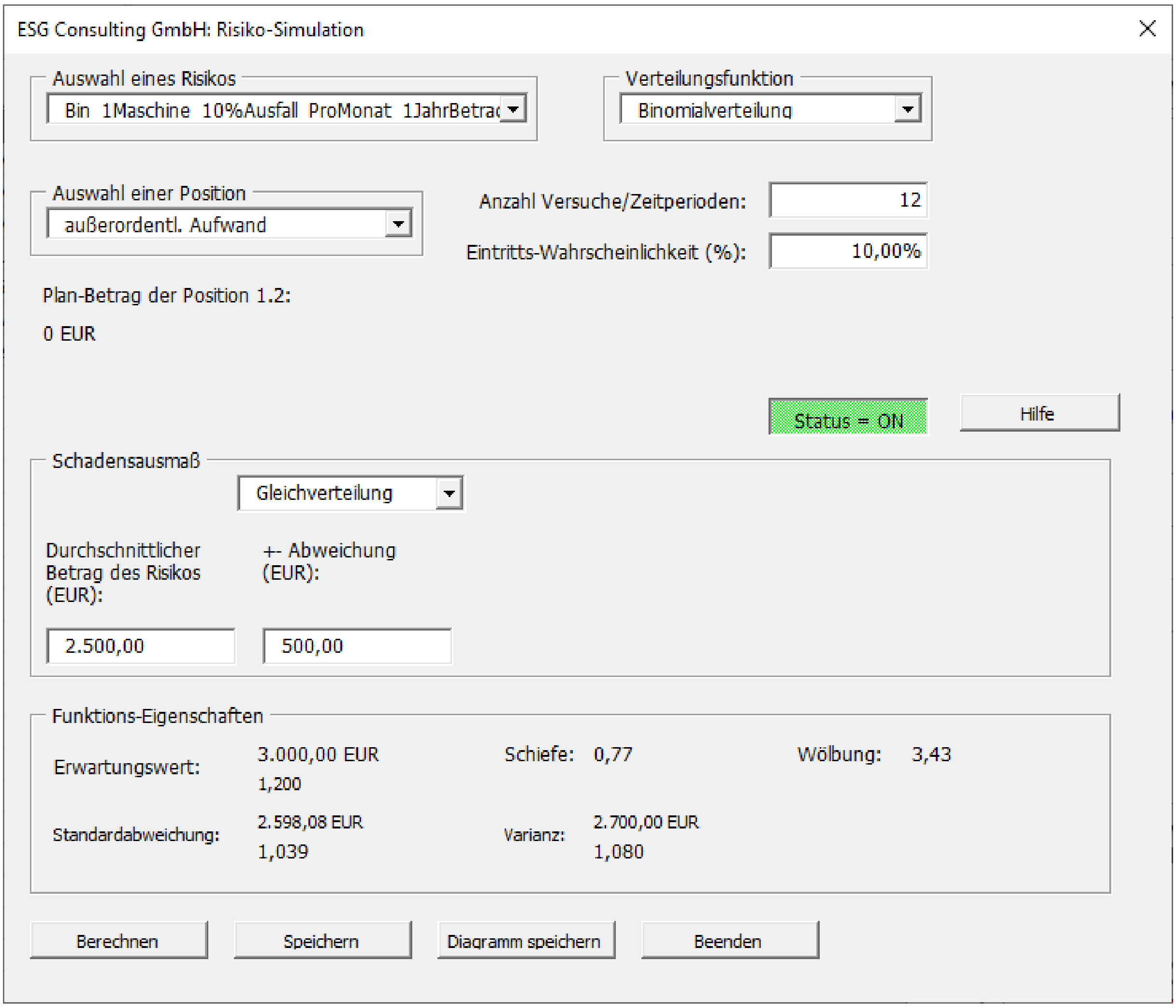


Abbildung 5: 1 Maschine, Eintrittswahrscheinlichkeit 10% bei Zeitperiode von 12 Monaten

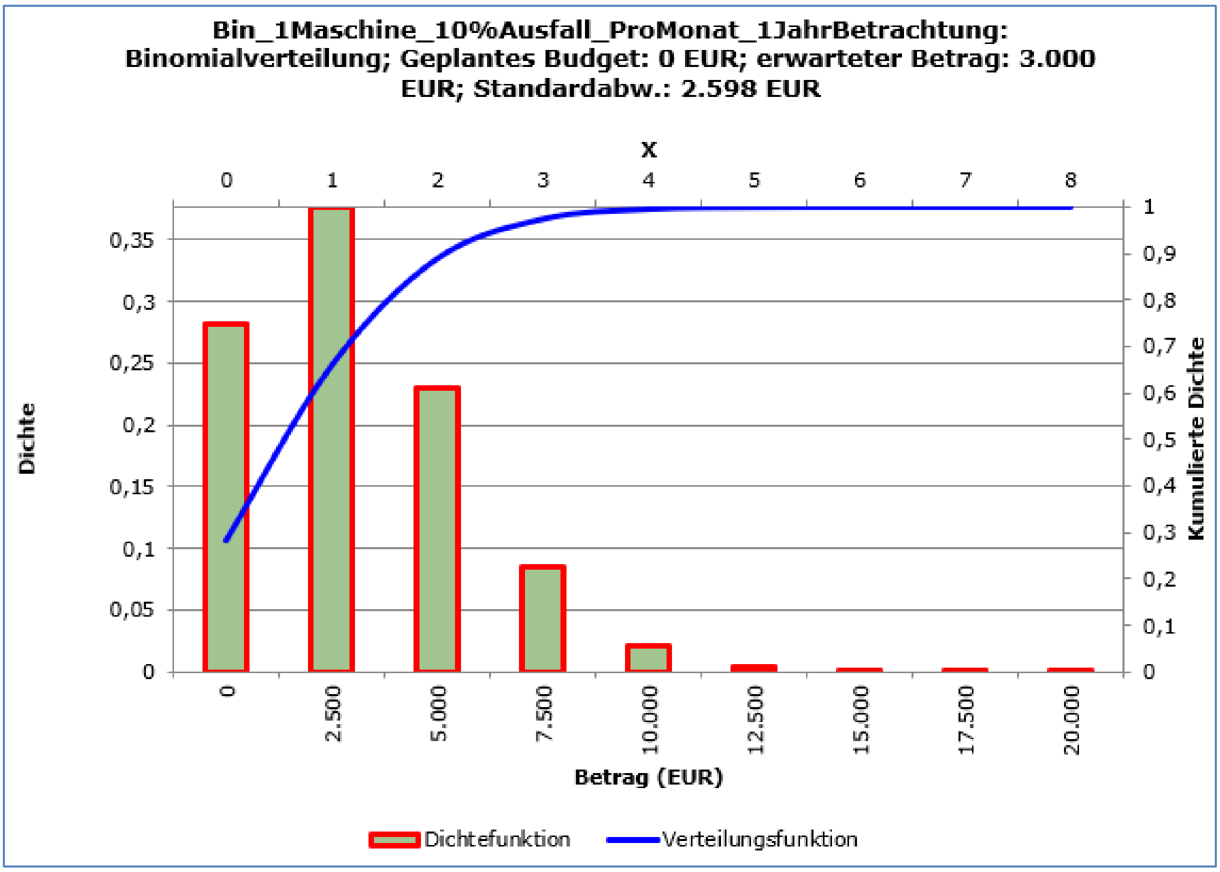


*Abbildung 6: Zähldichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von **Bin**(12; 0,1)*

2.2 Beispiel Binomial-Schadenverteilung 2 (6 Maschinen, mehrere Zeitperioden)

Als Variante zum vorangegangenen Beispiel (**Bin**(6; 0,1): 1 Maschine, 12 Monate Zeitperiode, 10% Schadenseintrittswahrscheinlichkeit je Monat) kann man die Situation betrachten, dass der Betrieb nun 6 Maschinen gleichzeitig einsetzt. Dann liegt also pro einzelner Zeitperiode (hier 1 Monat) die mögliche Schadenanzahl zwischen 0 und 6. Die Tabelle 1 und Abbildung 4 zeigen dann also die Schadenanzahlverteilung einer einzigen Zeitperiode (Unabhängigkeit der einzelnen Maschinen vorausgesetzt). In dieser Variante wird also im Wesentlichen nur die Binomial-Verteilung und nicht der Bernoulli-Prozess betrachtet. Genau genommen hat man in diesem Modell keine Informationen über die Eintrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Unterperioden, da definitionsgemäß das Zufallsereignis „Maschinenschaden" nur einmal pro Zeitperioden betrachtet wird und sich darauf die Eintrittswahrscheinlichkeit p bezieht.

Möchte man die 6 Maschinen über z.B. 12 Monate bei einer Schadenseintrittswahrscheinlichkeit von 10% pro Monat modellieren, so kann p definieren zu

$$p = \text{„Anzahl Maschinen"} * \text{„Anzahl Zeitperioden"} = 6 * 12 = 72$$

Dieses Risiko soll nun mit MC-ECO modelliert werden. Die Eingabe-Parameter sind:

- Verteilungsfunktion: Binomial-Verteilung
- Eintritts-Wahrscheinlichkeit *p* pro Monat pro Maschine: 10%
- Zeitperiode: 12 Monate
- Anzahl Maschinen: 6
- *t* = 12 * 6 = 7,2
- Schadensausmaß pro Maschinenausfall: Gleichverteilung mit 2.500 EUR ± 500 EUR

Der Erwartungswert **E**(*N(t)*) = *t* * *p* = 12 * 6 * 0,1 = 7,2 entspr. 2.500 EUR * 7,2 = 18.00 EUR pro Jahr

Die Varianz **Var**(*N(t)*) = *t* * *p* * *(1 – p)* = 12 * 6 * 0,1 * (1 – 0,1) = 7,2 * 0,9 = 6,48 entspr. 16.200 EUR

(Risiko 3 im Szenario MaschinenSchaden.xlsx):

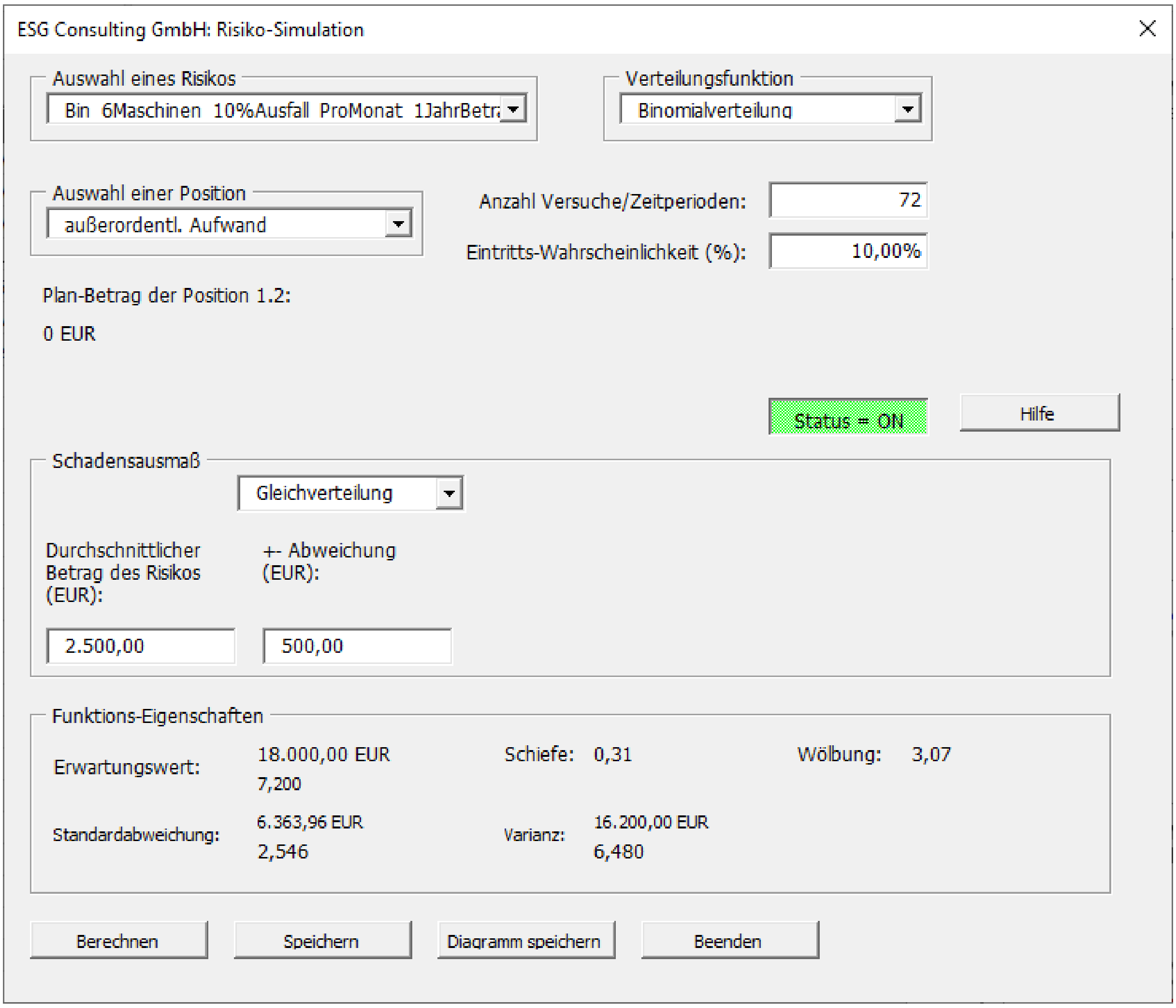


Abbildung 7: 6 Maschinen, 10% Schadenswahrscheinlichkeit pro Monat, 12 Monate Zeitperiode

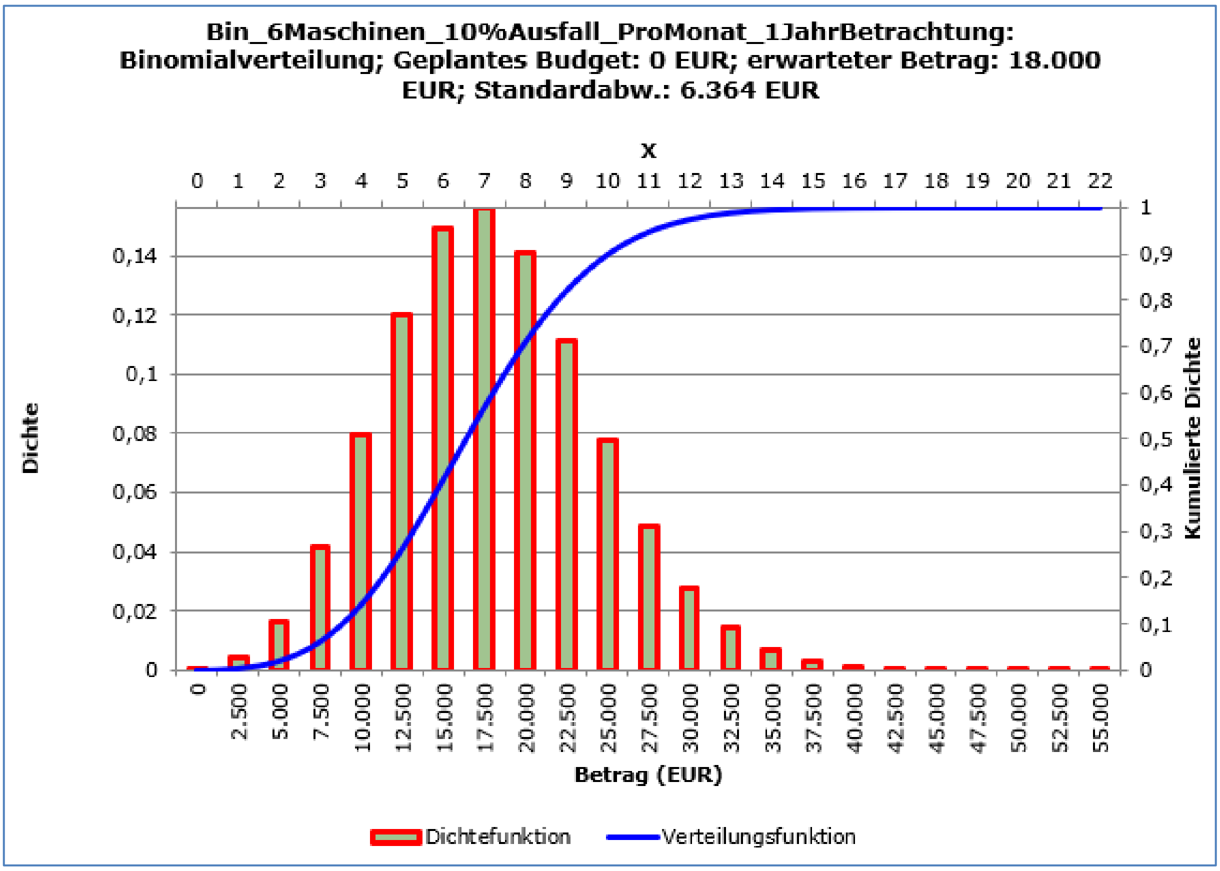


*Abbildung 8: Zähldichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von **Bin**(72; 0,1)*

2.3 Beispiel Binomial-Schadenverteilung 3 (Kundenausfall)

Kundenausfall kann typischerweise mit einer Binomial-Verteilung modelliert werden, da ein Kunde nur 1-mal und nicht öfters ausfallen kann. Ein Unternehmen besitzt 250 Kunden; jeder Kunde davon kann mit einer Wahrscheinlichkeit von 2% pro Jahr ausfallen.

Dieses Risiko soll nun mit MC-ECO modelliert werden. Die Eingabe-Parameter sind:

- Verteilungsfunktion: Binomial-Verteilung
- Eintritts-Wahrscheinlichkeit pro Jahr: 2%
- Anzahl Kunden (Versuche): 250
- Schadensausmaß pro Kundenausfall: Gleichverteilung mit 5.000 EUR ± 0 EUR

Der Erwartungswert **E**($N(t)$) = t * p = 250 * 0,02 = 5 entspr. 5.000 EUR * 5 = 25.000 EUR

(Risiko 7 im Szenario MaschinenSchaden.xlsx):

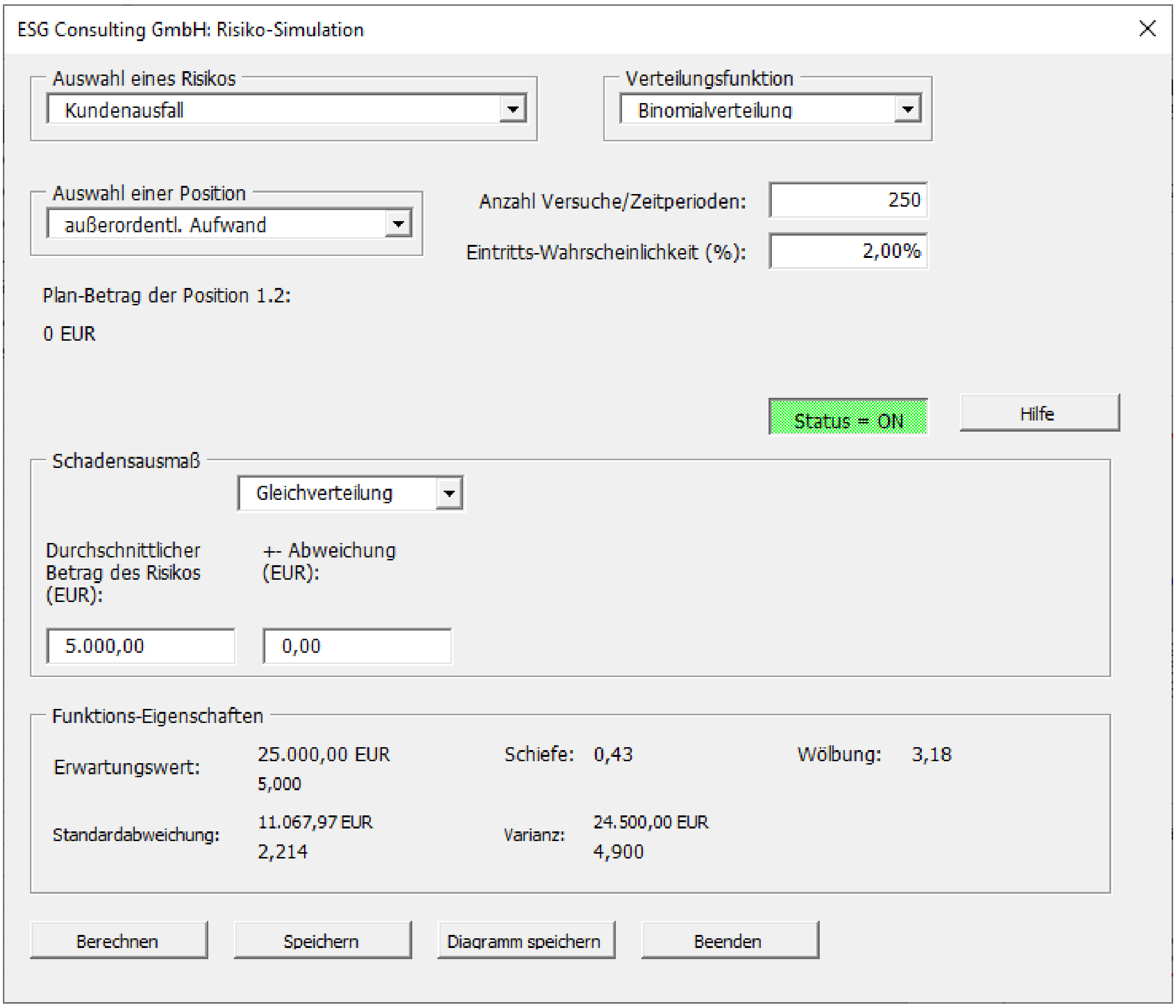


Abbildung 9: Modellierung Kundenausfall

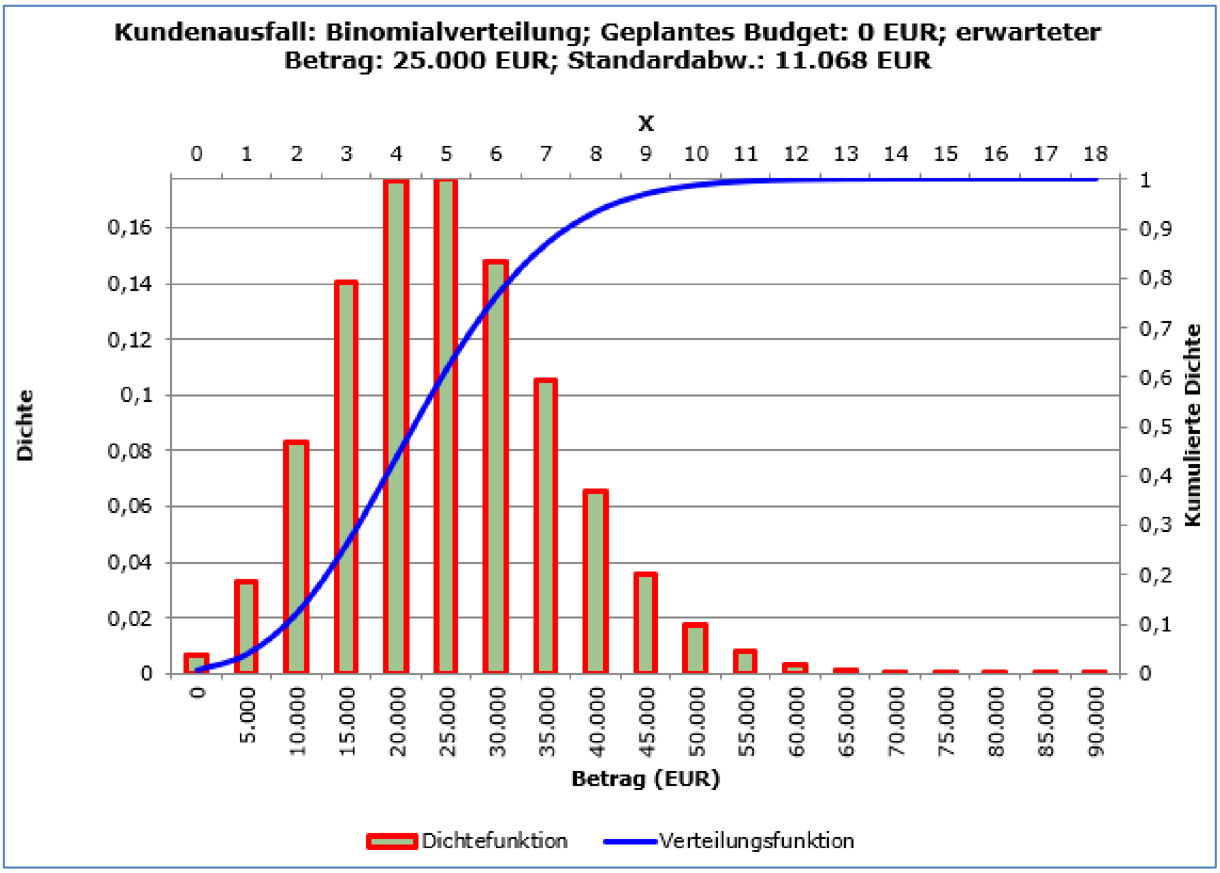


Abbildung 10: Zähldichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von Bin(250; 0,02)

3. Poisson-Prozess und Poisson-Verteilung

3.1 Homogener Poisson-Prozess

Der *homogene Poisson-Prozess* stellt die mathematisch einfachste Variante von Poisson-Prozessen dar. Er ist durch folgende Bedingungen charakterisiert:

Definition (Homogener Poisson-Prozess)

Ein Zählprozess $N(t)$ heißt homogener Poisson-Prozess mit $\lambda > 0$, falls gilt

(P1) $N(0) = 0$

(P2) $N(t+u) - N(t) \sim$ **Pois**(λu) für beliebige $t >= 0, u > 0$

(P3) Die Zufallsvariablen $N(t_{i+1}) - N(t_i)$, i = 0,…, n-1, sind für beliebige $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ unabhängig voneinander.

Dabei bezeichnet **Pois**(α) die Poisson-Verteilung mit Parameter α; d.h. mit $\alpha = \lambda u$ *gilt*

$$P(N(u) = n) =: p_n(u) = \left(\frac{(\lambda u)^n}{n!}\right) * e^{-\lambda u} \quad \text{für } n \in N_0 \text{ und } u >= 0$$

Für Erwartungswert und Varianz gilt also:

$$\mathbf{E}(N(u)) = \mathbf{Var}(N(u)) = \lambda u$$

Der Parameter λ wird im Zusammenhang mit (homogenen) Schadenanzahlverteilungen auch *Schadenintensität* (für den Zeitraum der Länge 1) genannt. Manchmal wird allgemeiner auch α als *Schadenintensität für den Zeitraum der Länge u* bezeichnet. Die Eigenschaft (P2) besagt, dass die zufällige Anzahl der Schäden in einem gegebenen Zeitintervall Poisson-verteilt ist mit einer Intensität, d.h. erwarteter Anzahl von Schäden, die proportional mit dem Faktor λ nur von der Länge des Intervalls abhängt. Speziell hängt also die Verteilung der Schadenzahl nicht von der Lage des Intervalls ab. Dies wird auch als *Homogenität* oder *Stationarität* der Zuwächse bezeichnet. In Bezug auf die Schadenmodellierung bedeutet dies, dass es keine Saisonabhängigkeit oder systematischen zeitlichen Trends gibt.

Eigenschaft (P1) gilt definitionsgemäß für jeden Schadenanzahlprozess. Die Eigenschaft (P3) besagt, dass die Schadenanzahl eines bestimmten Zeitraums nicht die Schadenanzahl eines davon disjunkten Zeitraums beeinflusst; dies wird auch als *Unabhängigkeit der Zuwächse* bezeichnet. Insbesondere gibt es keine Ansteckungsprozesse oder Kettenreaktionen und auch keine Lerneffekte. Aus Schaden wird man also in diesem Fall nicht klug!

3.2 Poisson-Verteilung

Die *Poisson-Verteilung* N ~ **Pois**(α) ergibt sich als Schadenanzahlverteilung bei homogenen Poisson-Prozessen. Die Größe α entspricht dem Erwartungswert der Schadenanzahl bis zu einem vorgegebenen festen Zeitpunkt *t*; durch die Festsetzung $\alpha = \lambda * t$ mit dem Intensitätsparameter λ kann man eine einfache, nämlich bzgl. des Erwartungswerts und der Varianz lineare Abhängigkeit der Schadenanzahl von der Länge des Betrachtungszeitraums darstellen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion lautet

$$P(N = n) =: p_n = \frac{(\alpha)^n}{n!} * e^{-\alpha} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

Die Varianz entspricht dem Erwartungswert der Poisson-Verteilung; es gilt also

$$\mathbf{E}(N) = \mathbf{Var}(N) = \alpha$$

Eine für die Schadenmodellierung sehr wichtige Eigenschaft der Poisson-Verteilung besteht darin, dass die Summe zweier unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariablen wieder Poisson-verteilt ist; genauer:

$$N_i \sim \mathbf{Pois}(\alpha_i) \; (i = 1, 2) \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 \sim \mathbf{Pois}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Entsprechendes gilt somit auch für die Summe von n unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen.

3.3 Beispiel Poisson-Schadenverteilung 1 (1 Maschine, mehrere Zeitperioden)

Wie im Beispiel aus Kapitel 2.1 soll die Situation betrachtet werden, dass ein Betrieb eine Maschine *t* (z.B. *t* = 6) Zeitperioden lang einsetzt und die erwartete Anzahl der Maschinenausfälle pro Zeitperiode (Monat) 0,1 (=10%) beträgt. Abweichend soll aber die Anzahl der nach *t* Zeitperioden beobachteten Maschinenausfälle eine Poisson-Verteilung mit Intensitätsparameter λ = 0,1, also mit einem periodenbezogenen Intensitätsparameter von

$$\alpha = 0{,}1 * t = 0{,}6$$

gelten.

(Risiko 4 im Szenario MaschinenSchaden.xlsx):

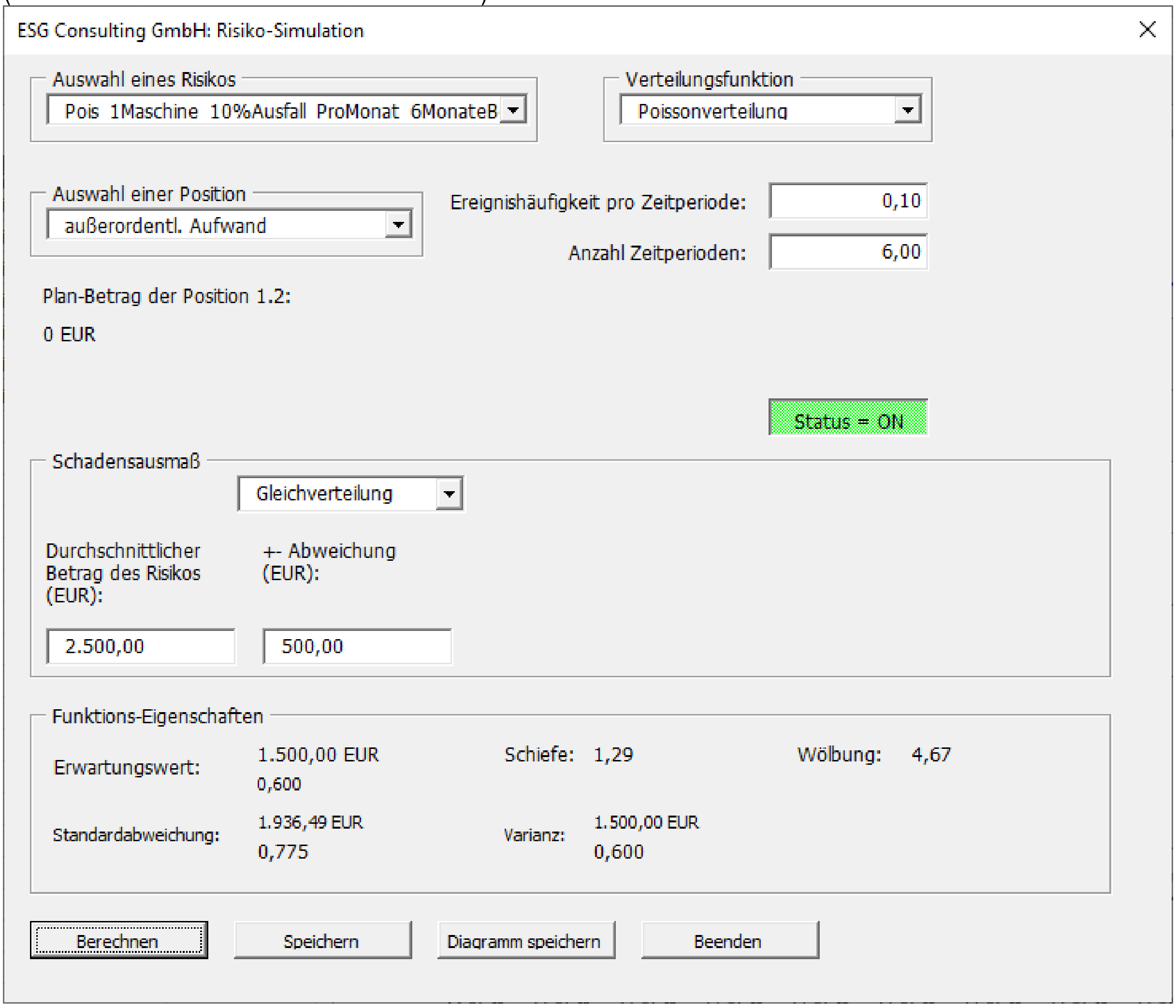


Abbildung 11: 1 Maschine, Eintrittswahrscheinlichkeit 10% bei Zeitperiode von 6 Monaten

Dieses Risiko soll nun mit MC-ECO modelliert werden. Die Eingabe-Parameter sind:

- Verteilungsfunktion: Poisson-Verteilung
- Eintritts-Wahrscheinlichkeit pro Monat: 10%
- Zeitperiode: 6 Monate
- Schadensausmaß pro Maschinenausfall: Gleichverteilung mit 2.500 EUR ± 500 EUR

Der Erwartungswert $\mathbf{E}(N(t)) = t * p = 6 * 0{,}1 = 0{,}6$ entspr. 2.500 EUR * 0,6 = 1.500 EUR

Die Varianz $\mathbf{Var}(N(t)) = \mathbf{E}(N(t)) = 0{,}6$ entspr. 2.500 EUR * 0,6 = 1.500 EUR

Die erwartete Anzahl an Maschinenausfällen nach 6 Zeitperioden beträgt **E**(N) = 0,6 wie in Kap. 2.1, allerdings mit einer Varianz von ebenfalls **Var**(N) = 0,6. Anders als in Kap. 2.1 **können in diesem Modell nun auch mehrere (prinzipiell unbegrenzt viele) Maschinenausfälle pro Zeitperiode vorkommen**, und somit können über den 6

Monats-Zeitraum betrachtet insgesamt auch mehr als 6 Schäden vorkommen, wenngleich die Wahrscheinlichkeit dafür sehr klein ist, genauer

$$P(N > 6) = 1 – P(N<= 6)$$
$$= [P(N = 0) + P(N = 1) + … + P(N = 6)]$$
$$= 1- [(\alpha^0 * e^{-\alpha)} / 0!) + (\alpha^1 * e^{-\alpha)} / 1!) + … + (\alpha^6 * e^{-\alpha)} / 6!)]$$
$$= 3{,}29 * 10^{-6}$$

Hinweis zur Berechnung des Abbruchkriteriums für die Anzahl der maximalen Schadensfälle von MC-ECO:
Die Anzahl berechneter maximale Anzahl Schadensfälle *N* berechnet sich in MC-ECO wie folgt:

N = **InvPois**(0,9999999, α)

Wahrscheinlichkeit: 1 - 0,9999999 = 0,0000001 = 0,00001%

α (in diesem Fall): 0,1 * 6 = 0,6

→ maximale Anzahl Schadensfälle mit mehr als 0,00001% Ausfallwahrscheinlichkeit = 7

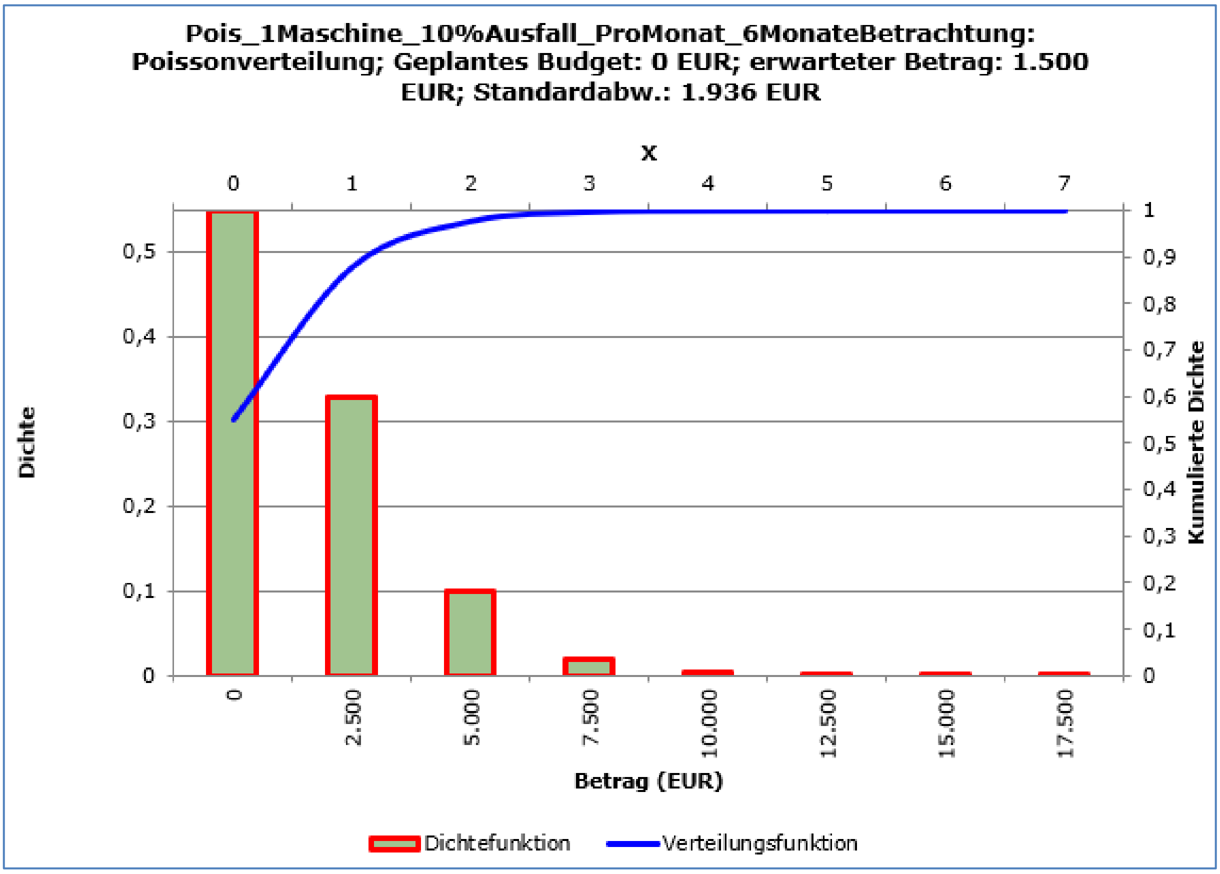


*Abbildung 12: Zähldichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von **Pois**(6; 0,1)*

3.4 Beispiel Poisson-Schadenverteilung 2 (6 Maschinen, mehrere Zeitperioden)

Auch in der zu Kap. 3.3 analogen Situation, dass in dem Betrieb nun sechs (n) gleichartige Maschinen unabhängig über eine Zeitperiode eingesetzt werden, kann das Poisson—Modell verwendet werden. Man geht bezogen auf den gesamten Maschinenbestand von einer Ausfallintensität

$$\alpha = (n * \lambda) * t = (6 * 0{,}1) * 6 = 0{,}6 * 6 = 3{,}6$$

aus.

(Risiko 5 im Szenario MaschinenSchaden.xlsx):

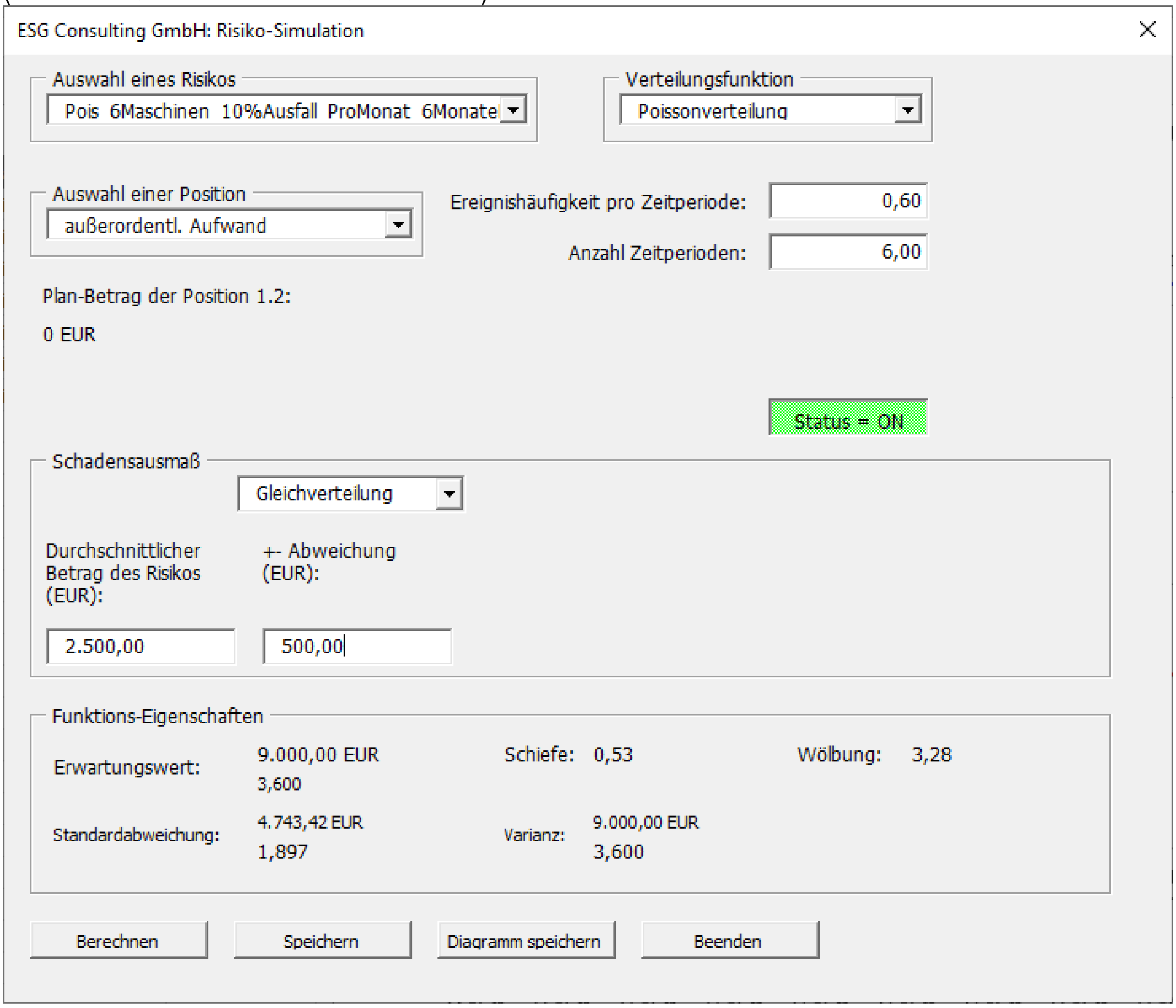


Abbildung 13: 6 Maschinen, Eintrittswahrscheinlichkeit 10% je Maschine bei Zeitperiode von 6 Monaten

Der Erwartungswert von 9.000 EUR entspricht genau 6 * 1.500 EUR pro Maschine.

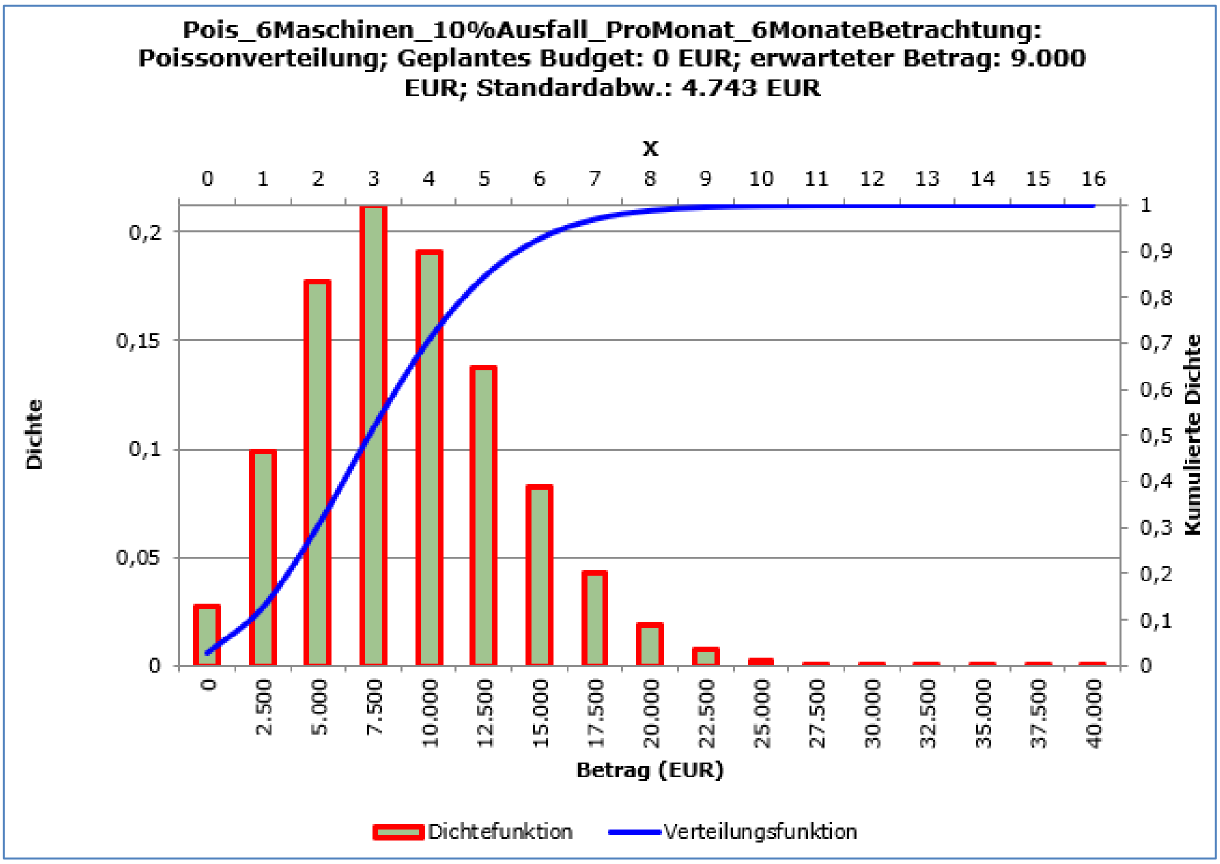


Abbildung 14: Zähldichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von ***Pois****(6; 0,6)*

3.5 Beispiel Poisson-Schadenverteilung 3 (Mischung von Schadenverteilungen)

Ein Betrieb setzt in der Produktion eine alte Maschine mit jahresbezogener Ausfallwahrscheinlichkeit $\alpha_1 = 2{,}2$ und eine neue Maschine mit jahresbezogener Ausfallintensität von $\alpha_2 = 0{,}8$ ein, wobei die Ausfallzahlen Poisson-verteilt angenommen werden. Somit genügt auch die Anzahl N der Ausfälle an beiden Maschinen insgesamt einer Poisson-Verteilung mit jahresbezogenem Intensitätsparameter $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 2{,}2 + 0{,}8 = 3$. Beispielsweise kommt es im Jahresmittel zu $E(N) = 3$ Ausfällen und die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb eines Jahres überhaupt kein Maschinenausfall eintritt, beträgt $P(N{=}0) = e^{-3} \approx 0{,}05$.

(Risiko 6 im Szenario MaschinenSchaden.xlsx):

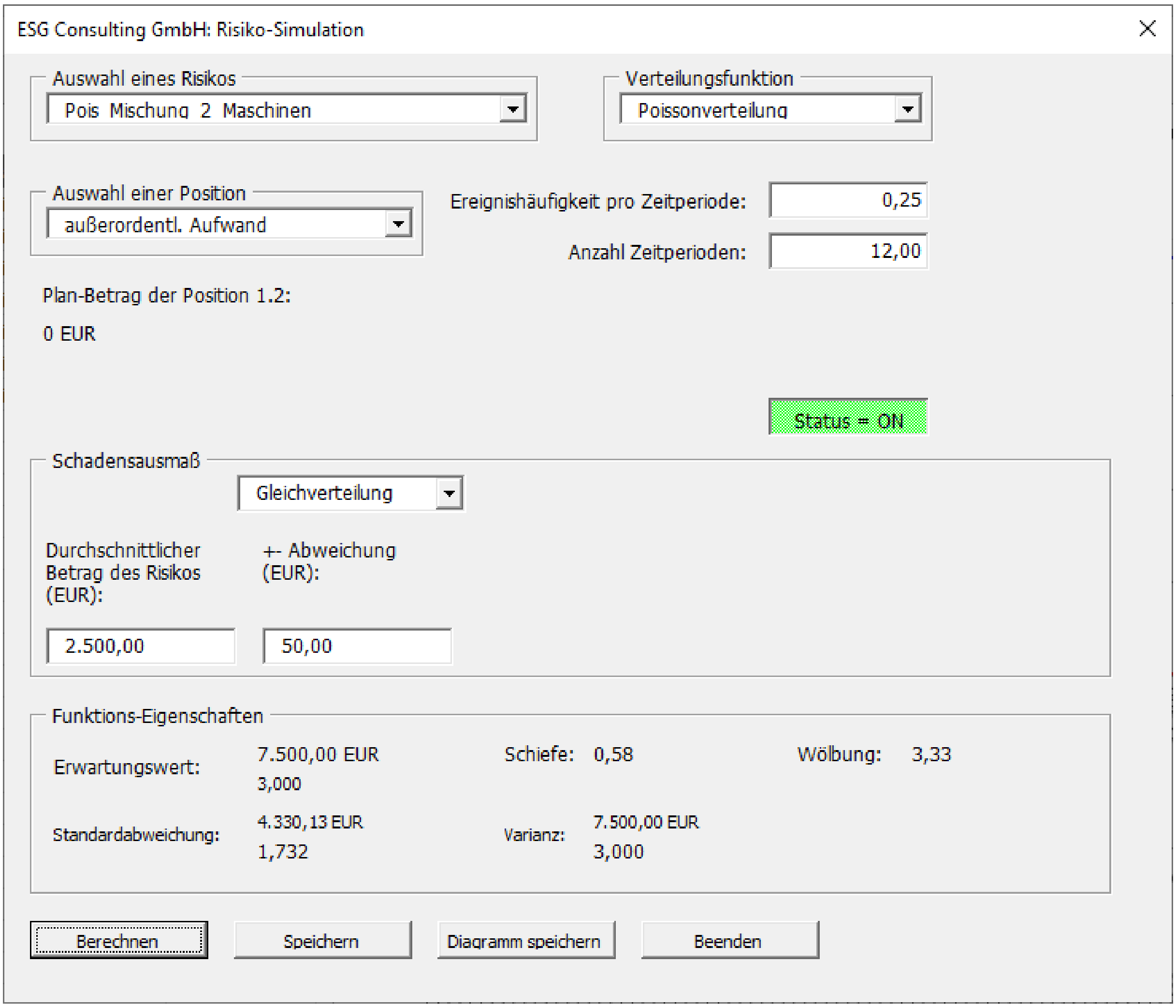


Abbildung 15: Mischung aus 2 Maschinen bei Zeitperiode von 1 Monaten

Dieses Risiko soll nun mit MC-ECO modelliert werden. Die Eingabe-Parameter sind:

- Verteilungsfunktion: Poisson-Verteilung
- Maschine-1: jahresbezogene Ausfallintensität $\alpha_1 = 2{,}2$
- Maschine-2: jahresbezogene Ausfallintensität $\alpha_2 = 0{,}8$
- Bezogen auf Zeitperiode von 1 Monat:
  - » $\lambda_1 = \alpha_1 / 12 = 0{,}18333$
  - » $\lambda_2 = \alpha_2 / 12 = 0{,}06667$
  - » $\lambda_{gesamt} = \alpha_1 + \alpha_2$
- Ausfälle pro Zeiteinheit (1 Monat): 0,25
- Zeitperiode: 12 Monate
- Schadensausmaß pro Maschinenausfall: Gleichverteilung mit 2.500 EUR ± 50 EUR

Der Erwartungswert **E**(*N*(*t*)) = *t* * *p* = 12 * 0,25 = 3 entspr. 2.500 EUR * 3 = 7.500 EUR

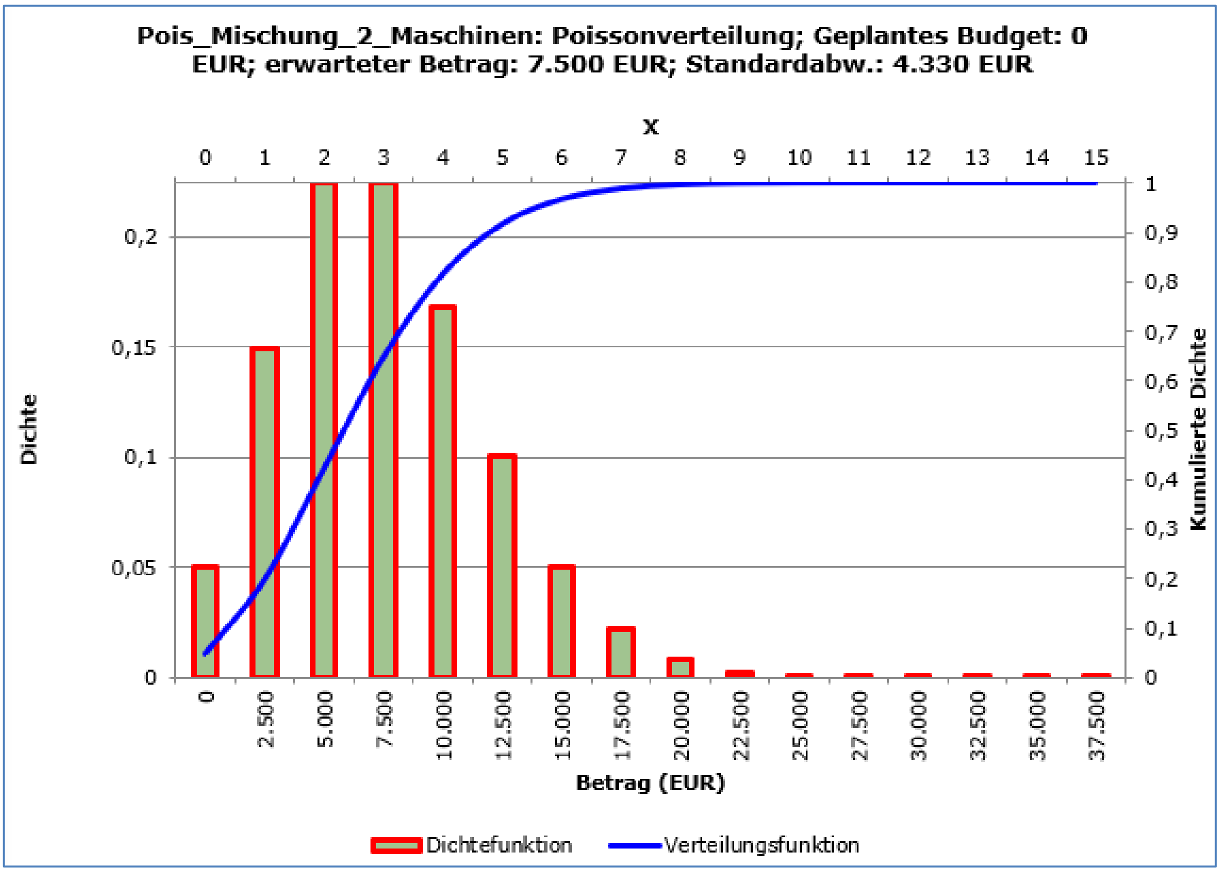


Abbildung 16: 2 unterschiedliche Maschinen - Schadensverteilung in 1 Jahr

Wendet man dieses Risiko mittels Monte-Carlo-Simulation (MCS) im Modell auf die Unterposition „außerordentl. Aufwand“ mit dem geplanten Budget von 0 EUR an, so kann man die Verteilung bei einem Schadensausmaß von 2.500 ERU ± 50 EUR pro Schadenfall entsprechend der modellierten Risikofunktion „Poisson-Verteilung“ erkennen.

Position außerordentl. Aufwand						
Planwert:	0 €	Wahrscheinlichkeit	Differenz (abs)	Differenz (%)	Variations-Koeffizie	0,57
Bei Konfidenz: 20%	10.122 €	20,00%	10.122 €		Std-Abweichung:	4.305 €
Wahrscheinlichster Wert:	7.251 €	41,30%	7.251 €		Schiefe:	0,53
Erwartungswert:	7.537 €	62,54%	7.537 €		Wölbung:	3,21
Value At Risk:	69 €	1,00%	69 €			

			Plan	Erwartungswert	Std-Abweichung
1	1.1	Maschinen-Schaden	0 €	7.537 €	4.305 €
	1.2	außerordentl. Aufwand	0 €	7.537 €	4.305 €

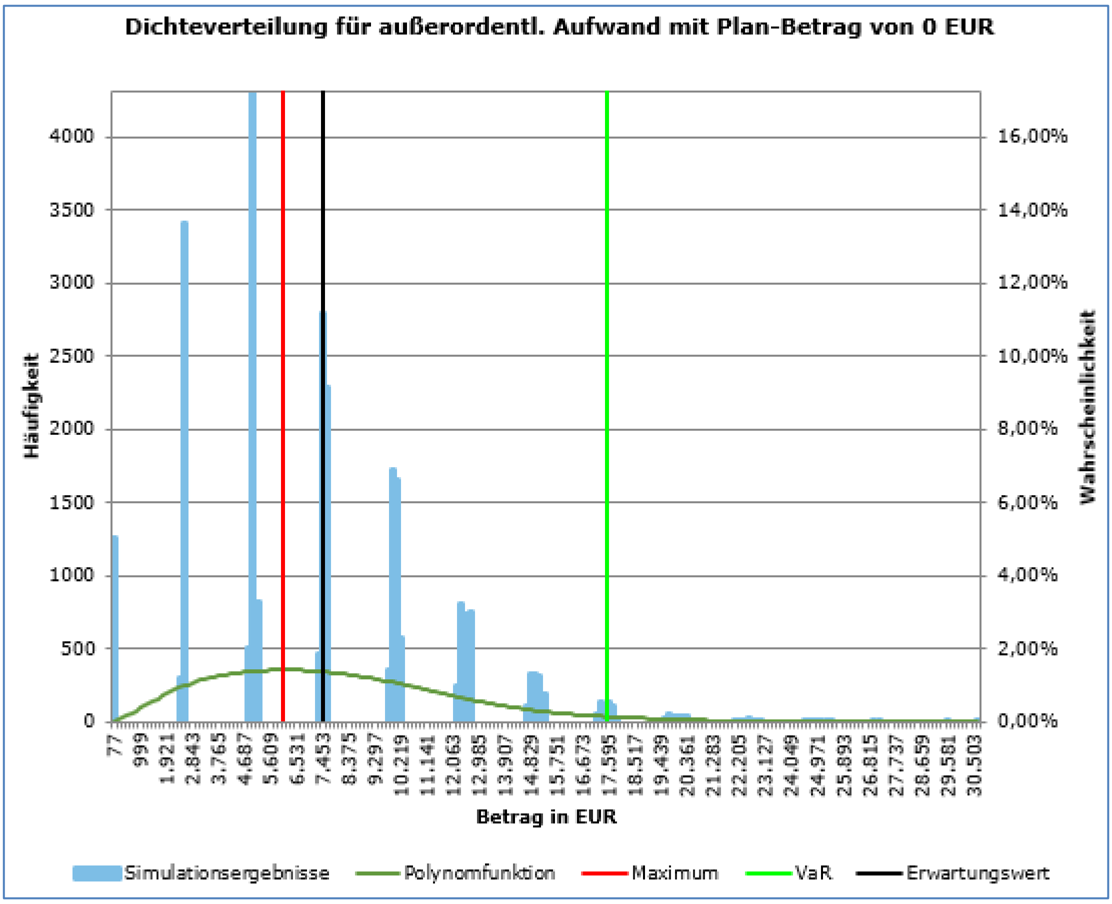


Abbildung 17: Dichteverteilung der MCS einer Poisson-Verteilung

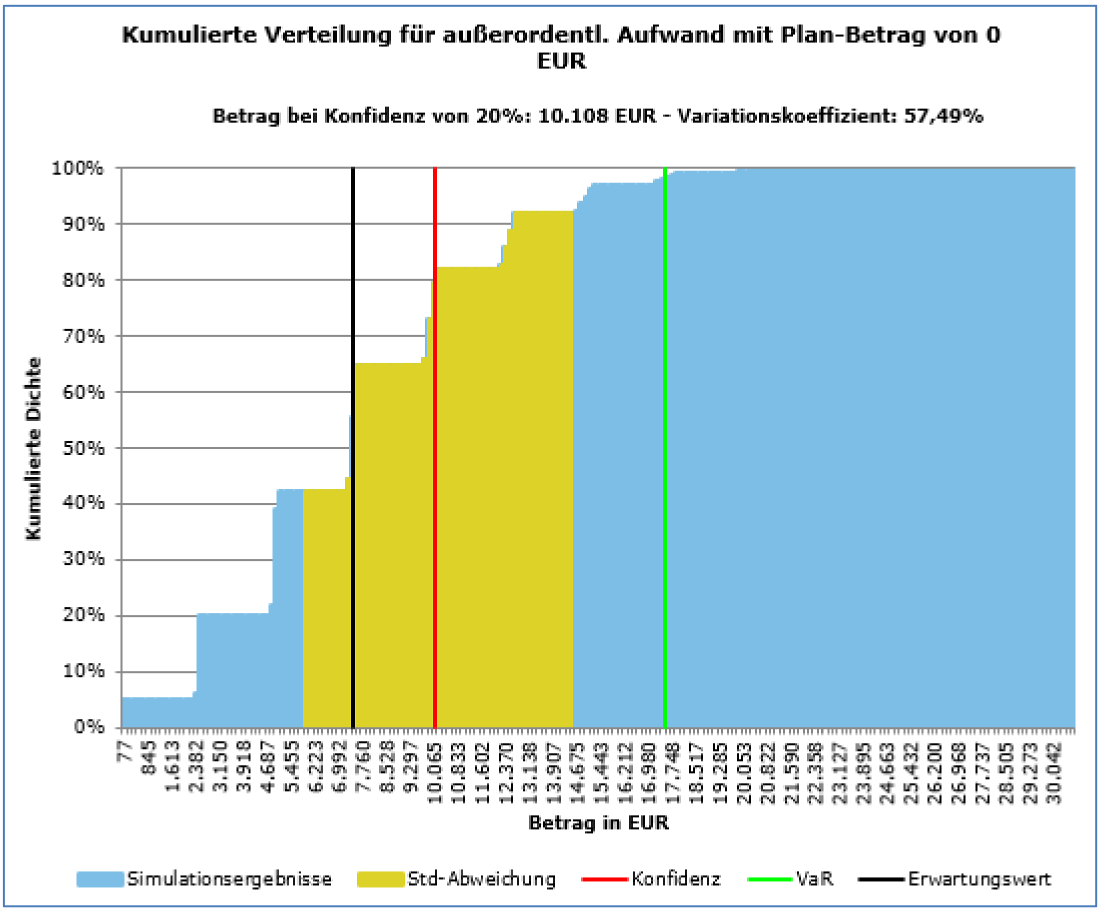


Abbildung 18: Kumulierte Verteilung in MCS mit einer Poisson-Verteilung

4. Systemverfügbarkeit von IT-Systemen

Die Erwartungen an die Verfügbarkeit von IT-Systemen steigen nach wie vor. Die Verfügbarkeit eines Systems oder einer Systemkomponente ist definiert als prozentualer Zeitanteil, in dem dieses System bzw. Die Komponente fehlerfrei funktioniert. Verfügbarkeit ist also der Grad, zu dem ein Dienst oder eine Applikation jene Funktionalität für den Anwender liefert, für die er bestimmt ist.

4.1 Kennzahlen der Systemverfügbarkeit: MTBF und MMT

Kennzahlen dienen der Bewertung des Systemverfügbarkeit. Wichtige Kenngrößen der Verfügbarkeit sind:

- MTBF: Mean Time Between Failure - mittlere ausfallfreie Zeit eines Systems
- MTTR: Mean Time to Repair - mittlere Dauer für die Wiederherstellung nach einem Ausfall

Oft wird bei der Berechnung von Kennzahlen nur die Hardware in den Blick genommen. Sofern Hochverfügbarkeit eine Anforderung an das System ist, müssen jedoch alle Komponenten beachtet werden. Ein funktionsfähiges Rechnersystem erfüllt seinen Zweck nicht, wenn die Applikation nicht läuft, das Netzwerk ausgefallen ist oder ein Benutzer versehentlich Daten in fehlerhafter Weise verändert hat. Daher muss das Gesamtsystem inklusive all seiner Komponenten betrachtet werden. Für jede dieser Komponenten muss gelten, dass sie keinen *Single Point of Failure (SPoF)* aufweist und dass beteiligte Komponenten fehlertolerant reagieren.

Mathematische Grundlagen:

Es sei der Betrachtungszeitraum *Z* 1 Jahr ~ 8760 Stunden

MTBF + MTTR = Z

Für die Verfügbarkeit V gilt:

V = MTBF / (MTBF + MTTR) = MTBF / Z

Für die Nichtverfügbarkeit N gilt:

N = MTTR / (MTBF + MTTR) = MTTR / Z ~ 1 – V

Damit ergibt sich u.a. für MTTR:

MTTR = MTBF * (1 – V) / V

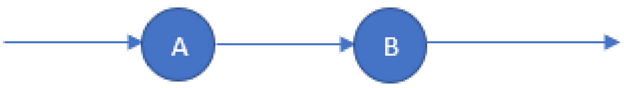
4.2 Berechnung der Systemverfügbarkeit

Möchte man die Verfügbarkeit eines Gesamtsystems angeben, kennt aber nur die Verfügbarkeit der Einzelkomponenten, kann die Gesamtverfügbarkeit nach den Regeln der Serien- und Parallelschaltung berechnet werden.

4.2.1 Serienschaltung

Eine Serienschaltung verschaltet abhängige Komponenten. Das System ist nur dann verfügbar, wenn alle Einzelkomponenten verfügbar sind. Ein Rechner ist z.B. nur dann verfügbar, wenn alle betriebsrelevanten Komponenten wie CPU, Speicher und Netzteil verfügbar sind.

Die Gesamtverfügbarkeit eines Systems, das aus in Serienschaltung angeordneten Komponenten besteht, wird durch die Multiplikation der Einzelverfügbarkeiten berechnet. Sind die Ausfallzeiten N_i der Komponenten darüber hinaus sehr klein, lässt sich die Gesamtausfallzeit auch als Summe der Ausfallzeiten der Einzelkomponenten angeben. Die Ausfallrate ist dann die Summe der Ausfallraten der Einzelkomponenten.



Eine Serienschaltung funktioniert, wenn sowohl Komponente A als auch Komponente B funktionieren. Die Wahrscheinlichkeit der Verfügbarkeit hierfür ist

$$V_{gesamt} = P(A \cap B) \xrightarrow{\substack{stochast.\\ unabhängig}} P(A) * P(B) = p_A * p_B$$

$$V_{gesamt} = \prod_{1}^{n} V_i$$

Die Fehlerquote eines Systems, das aus mehreren Elementen besteht, steigt mit der Zahl der Elemente. Damit ist die Ausfallwahrscheinlichkeit des Gesamtsystems wesentlich größer als jene der Einzelkomponenten.

<u>Beispiel</u>:

- Gesamtbetrachtung von 1 Jahr (ca. 8760 Stunden)
- Verfügbarkeit Komponente A: 99,99 %
- Verfügbarkeit Komponente B: 99,9 %

Berechnung der Gesamtwahrscheinlichkeit der in Serie verschalteten Konponenten A und B

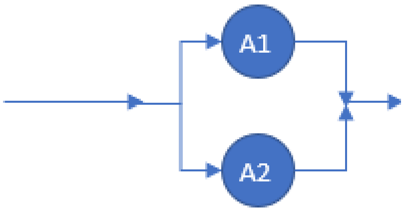
$V_{gesamt} = V(A) * V(B)$ = 0,9999 * 0,999 = 0,9989001

$A_{gesamt} = 1 - V_{gesamt}$ = 1 - 0,9989001 = 0,00109990000000004

Geschätzte Ausfallzeit / Jahr:	Stunden	9,635124	Minuten	578,11

4.2.2 Parallelschaltung

In einer Parallelschaltung sind die Komponenten *redundant* angeordnet. Das System ist verfügbar, solange mindestens eine von mehreren Komponenten verfügbar ist. Man spricht hier von unabhängigen Komponenten.



Eine Parallelschaltung funktioniert, wenn Komponente A oder Komponente B funktionieren. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$V_{\,gesamt} = P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \xrightarrow{\substack{stochast.\\ unabhängig}} 1 - P(\overline{A}) * P(\overline{B})$$
$$= 1 - (1 - p_{\,A}) * (1 - p_{\,B})$$

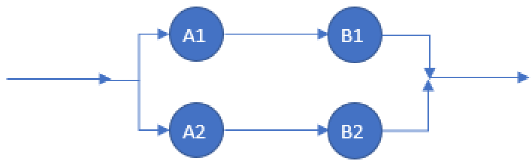
Die Gesamtausfallzeit in einer Parallelschaltung ergibt sich folglich aus dem Produkt der Einzelausfallzeiten.

$$N_{gesamt} = \prod_{1}^{n} N_i$$
$$V_{gesamt} = 1 - N_{gesamt}$$

<u>Beispiel</u>:

- Gesamtbetrachtung von 1 Jahr (ca. 8760 Stunden)
- Verfügbarkeit Komponente A1: 99,99 %
- Verfügbarkeit Komponente A2: 99,99 %
- Verfügbarkeit Komponente B1: 99,9 %
- Verfügbarkeit Komponente B2: 99,9 %

Berechnung der Gesamtwahrscheinlichkeit der in Serie verschalteten Konponenten A und B



$V_{gesamt} = 1 - (1 - V(A1) * V(B1)) * (1 - V(A2) * V(B2))$

$V_{gesamt} = 1 - (1 - 0{,}9999 * 0{,}999)) * (1 - 0{,}9999 * 0{,}999))$

$V_{gesamt} =$ 0,9999988

$A_{gesamt} = 1 - V_{gesamt} =$ 0,0000012

Geschätzte Ausfallzeit / Jahr:	Stunden	0,010597673	Sekunden	38,15

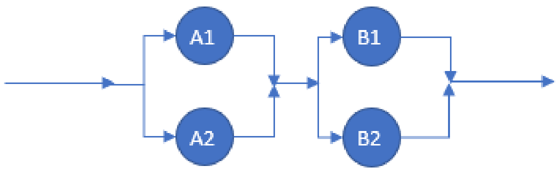
Bei paralleler Auslegung der Serienschaltung A-B mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 578 Minuten pro Jahr würde sich bei entsprechender Parallelschaltung auf 38,15 Sekunden pro Jahr vermindern.

In diesem Beispiel sind nun noch jeweils Komponenten A1 und B1 sowie A2 und B2 in Serie geschaltet. Das hat zur Folge, dass bei Ausfall der Komponente A1 der Gesamtzweig-1 nicht mehr verfügbar ist. Hebt man diese Serienschaltung auf und parallelisiert auch hier, so kommt man zur mehrfach parallelen Schaltung.

4.2.3 Mehrfach parallele Schaltung

Mit der Annahme, wie sie für die Parametrierung aus dem vorhergehenden Beispiel verwendet wurde, ergäbe sich mit diesem Aufbau eine erneut verminderte Ausfallzeit von jetzt nur noch 31,85 Sekunden pro Jahr.

Berechnung Mehrfach parallele Schaltung



$V_{gesamt} = V(A_{gesamt}) * V(B_{gesamt})$

$V_{gesamt} = V(A)^2 * V(B)^2 = (1-(1-V(A))^2) * (1- (1-V(B))^2)$

$V_{gesamt} =$ 0,99999899000001

$A_{gesamt} = 1 - V_{gesamt} =$ 0,00000100999999

Geschätzte Ausfallzeit / Jahr:	Stunden	0,0088476	Sekunden	31,85

4.3 Vergleich mit diskreten Verteilungen

4.3.1 Serienschaltung

<u>Beispiel 1:</u>

Annahmen:

- Verfügbarkeit Komponente A: 90%
- Verfügbarkeit Komponente B: 90%
- Durchschnittliche Verfügbarkeitswahrscheinlichkeit: 90%

Dies ergäbe eine Gesamtverfügbarkeit von 81% (= $V_A * V_B = 0{,}9 * 0{,}9$)

Die Binomial-Verteilung von MC-ECO würde wie folgt konfiguriert werden:

- Anzahl Versuche: entspricht der Anzahl von 2 Komponenten
- Eintrittswahrscheinlichkeit: 10% entspr. 1 - (90% + 90%) / 2

Hier ergibt sich ein Erwartungswert von 0,2, entspräche einer Verfügbarkeit von 80%

(Risiko 8 im Szenario MaschinenSchaden.xlsx):

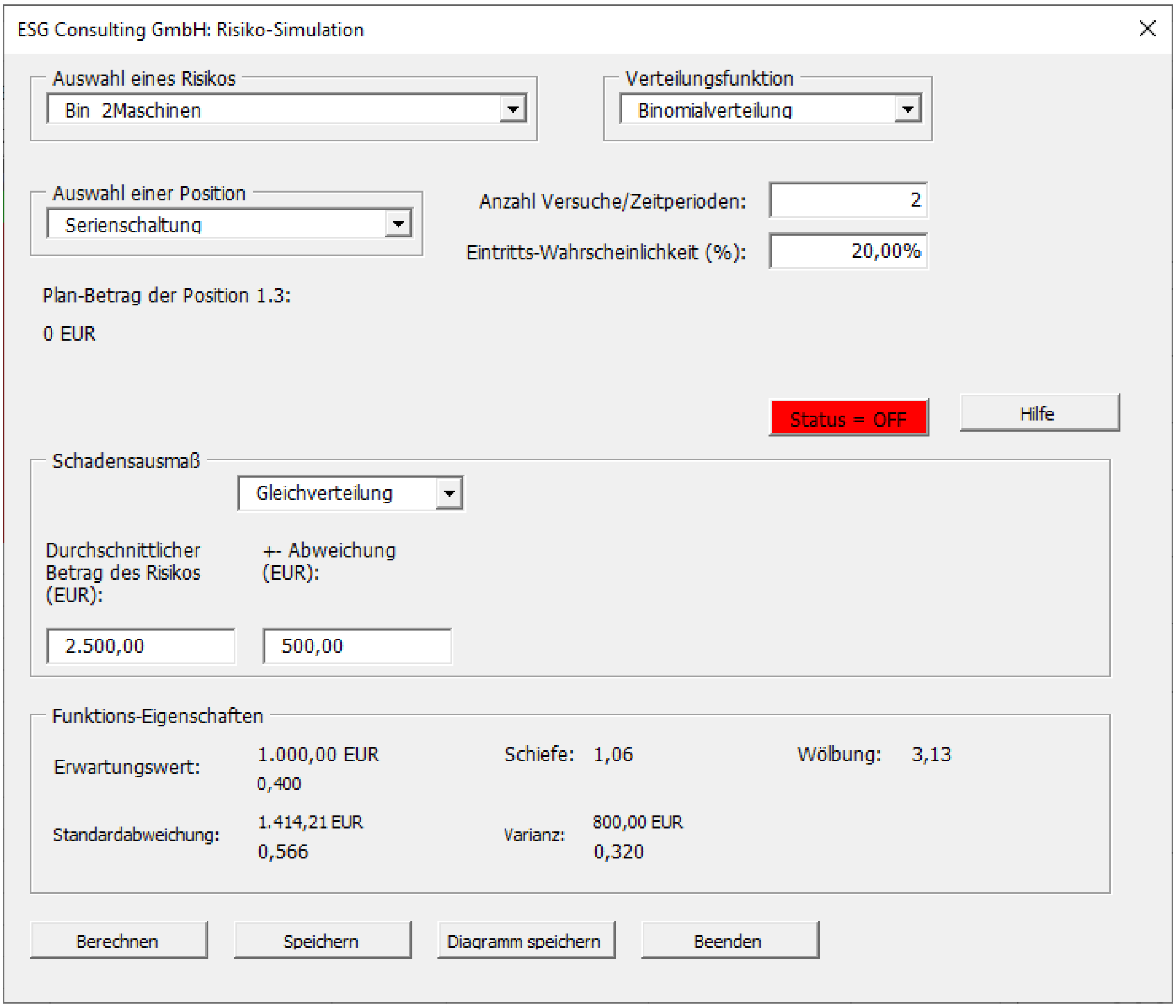


Abbildung 19: Binomialverteilung zweier seriell geschalteten Komponenten mit Ausfallwahrscheinlichkeiten von 90%

Aus Abbildung 20 ist zu erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Nichteintretens eines Schadens (X = 0) hier 81% (Dichte 0,81) beträgt. Dies entspricht genau dem Wert, der mit der Serienschaltung berechnet wurde.

Die Wahrscheinlichkeit, dass 1 der beiden Komponenten in einem Jahr ausfällt, beträgt 18% (Dichte 0,18), und die Wahrscheinlichkeit, dass beide Komponenten in einem Jahr ausfallen, beträgt 1% (Dichte 0,01).

Es ist anzumerken, dass bei der Binomial-Verteilung die Prämisse ist, dass ein Ereignis höchstens 1 mal auftritt.

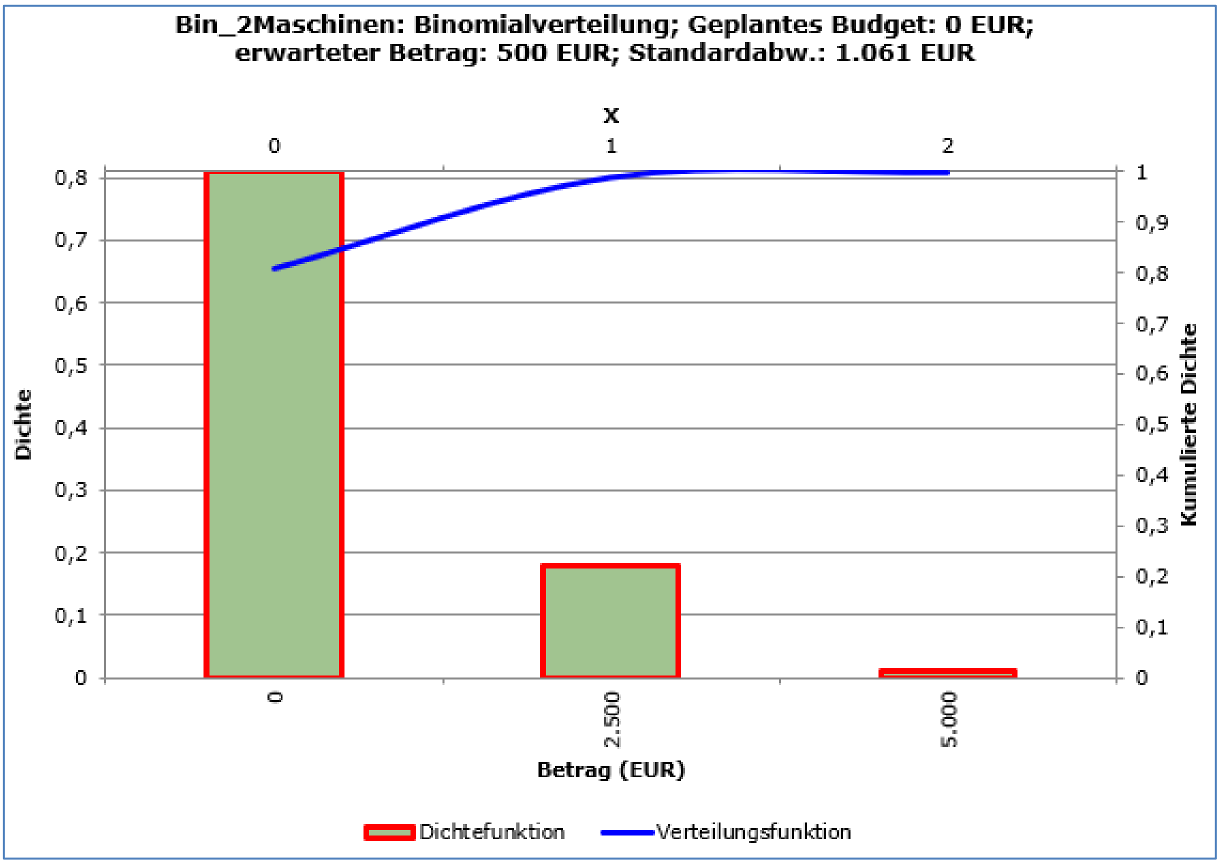


*Abbildung 20: Zähldichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von **Bin**(2; 0,1)*

Beispiel 2:

Annahmen:

- Verfügbarkeit Komponente A: 99%
- Verfügbarkeit Komponente B: 80%
- Durchschnittliche Verfügbarkeitswahrscheinlichkeit: 89,5%

Dies ergäbe eine Gesamtverfügbarkeit von 79,2% (= V_A * V_B = 0,99 * 0,8)

Die Binomial-Verteilung von MC-ECO würde wie folgt konfiguriert werden:

- Anzahl Versuche: entspricht der Anzahl von 2 Komponenten
- Eintrittswahrscheinlichkeit: 10,5% entspr. 1 - (99% + 80%) / 2

Hier ergibt sich ein Erwartungswert von 0,21, entspräche einer Verfügbarkeit von 79,9%

Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ausfall beider Komponenten auftreten würde, beträgt hier 80,1%.

Das heißt, liegen die Verfügbarkeiten beider Komponenten auseinander, dann ergibt die Binomial-Verteilung eine leichte Abweichung von der Berechnung der Serienschaltung.

Beispiel 3:

Annahmen:

- Verfügbarkeit Komponente A: 99%
- Verfügbarkeit Komponente B: 50%
- Durchschnittliche Verfügbarkeitswahrscheinlichkeit: 74,5%

Dies ergäbe eine Gesamtverfügbarkeit von 49,5% (= V_A * V_B = 0,99 * 0,5)

Die Binomial-Verteilung von MC-ECO würde wie folgt konfiguriert werden:

- Anzahl Versuche: entspricht der Anzahl von 2 Komponenten
- Eintrittswahrscheinlichkeit: 25,5% entspr. 1 - (99% + 50%) / 2

Hier ergibt sich ein Erwartungswert von 0,51, entspräche einer Verfügbarkeit von 51%

Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Ausfall beider Komponenten auftreten würde, beträgt hier 55,5%.

Das heißt, liegen die Verfügbarkeiten beider Komponenten weit auseinander, dann ergibt die Binomial-Verteilung eine größere Abweichung für den Fall, dass kein Ereignis auftritt, im Vergleich zu der Berechnung der Serienschaltung. Jedoch liegt der berechnete Erwartungswert von 0,51 (51%) nahe beim Wert, der per Serienschaltung berechnet wurde.

Verfügbarkeit Komponente A	Verfügbarkeit Komponente B	Serienschaltung Verfügbarkeit	Binomial Verfügbarkeit	Binomial Erwartungswert
90%	90%	81%	81%	0,2 ≙ 80%
99%	80%	79,2%	80,1%	0,21 ≙ 79,9%
99%	50%	49,5%	55,5%	0,51 ≙ 51%

Tabelle 2: Berechnung Serienschaltung vs. Binomialverteilung (2 Komponenten)

Verfügbarkeit Komponente A	Verfügbarkeit Komponente B	Verfügbarkeit Komponente B	Serienschaltung Verfügbarkeit	Binomial Verfügbarkeit	Binomial Erwartungswert
99%	99%	99%	97,0%	97,0%	0,03 ≙ 97%
99%	90%	80%	71,3%	72,2%	0,309 ≙ 69,1%
99%	80%	60%	47,5%	50,6%	0,609 ≙ 39,1%

Tabelle 3: Berechnung Serienschaltung vs. Binomialverteilung (3 Komponenten)

Empfehlung für die Simulation von Schäden bei Nichtverfügbarkeit

Sobald eine Komponente in einer Serienschaltung ausfällt, steht der von der Kette zur Verfügung gestellte Service nicht zur Verfügung. Ausfälle können verursacht werden durch

- Defekte Hardware

- Fehlerhafte Software
- Bedienungsfehler
- Stromausfälle
- Netzwerkprobleme
- Katastrophen / Desaster

Entsprechend der Ursachen kann natürlich auch die Downtime des Systems unterschiedlich ausfallen. Somit werden auch die Behebungskosten des Ausfalls unterschiedlich ausfallen. Zudem können die Behebungs-Kosten je Komponente unterschiedlich ausfallen. Neben den unmittelbaren Behebungskosten (z.B. Administrator-Zeit zum Reboot, Ersatz-HW besorgen und einbringen, Applikationsfehler beheben) können auch Kosten durch Nichtverfügbarkeit anfallen (entgangener Umsatz, Ausfall der Supply-Chain, Ausfall einer Maschine in der Produktionsstraße …).

Somit können je Ausfall einer Serienschaltung nur grob geschätzte Werte für die Kosten erhoben werden. Diese Schätzungenauigkeit ist wesentlich höher als die relative Abweichung zwischen Berechnung der Serienschaltung und einer Binomial-Verteilung.

Es empfiehlt sich daher, die mit der Serienschaltung berechnete (1 - Gesamt-Verfügbarkeit) in der Binomial-Verteilung zu verwenden und die Anzahl der Komponenten (Anzahl Versuche/Zeitperioden) auf 1 zu setzen. Mit dieser Parametrisierung der Binomial-Verteilungsfunktion und einer entsprechenden Bandbreite für den entstandenen Schaden kann eine Monte-Carlo-Simulation einfach durchgeführt werden.

Z.B.

- Verfügbarkeit Komponente A: 99%
- Verfügbarkeit Komponente B: 98%
- Verfügbarkeit Komponente C: 95%
- Ergibt eine Gesamtverfügbarkeit *V* von 92,17%
- Ergibt eine Nichtverfügbarkeit N von 7,83%
- Angenommener Schaden beim Ausfall der Serienschaltung: 25.000 EUR ± 2.000 EUR

Möchte man den Gesamtausfall einer Serienschaltung in MC-ECO berechnen, so kann man die Binomial-Verteilung benutzen, mit folgender Parametrisierung:

- Anzahl Versuche/Zeitperioden: 1 (dies entspricht der einen Serienschaltung)
- Eintrittswahrscheinlichkeit: 7,83%
- Schadensausmaß: Gleichverteilung mit 25.000 EUR ± 2.000 EUR

Die Binomialverteilung mit dieser Parametrisierung wird in dem Beispiel mit Risiko Nr. 9 in MC-ECO der Sub-Position „Serienschaltung“ zugewiesen.

(Risiko 9 im Szenario MaschinenSchaden.xlsx):

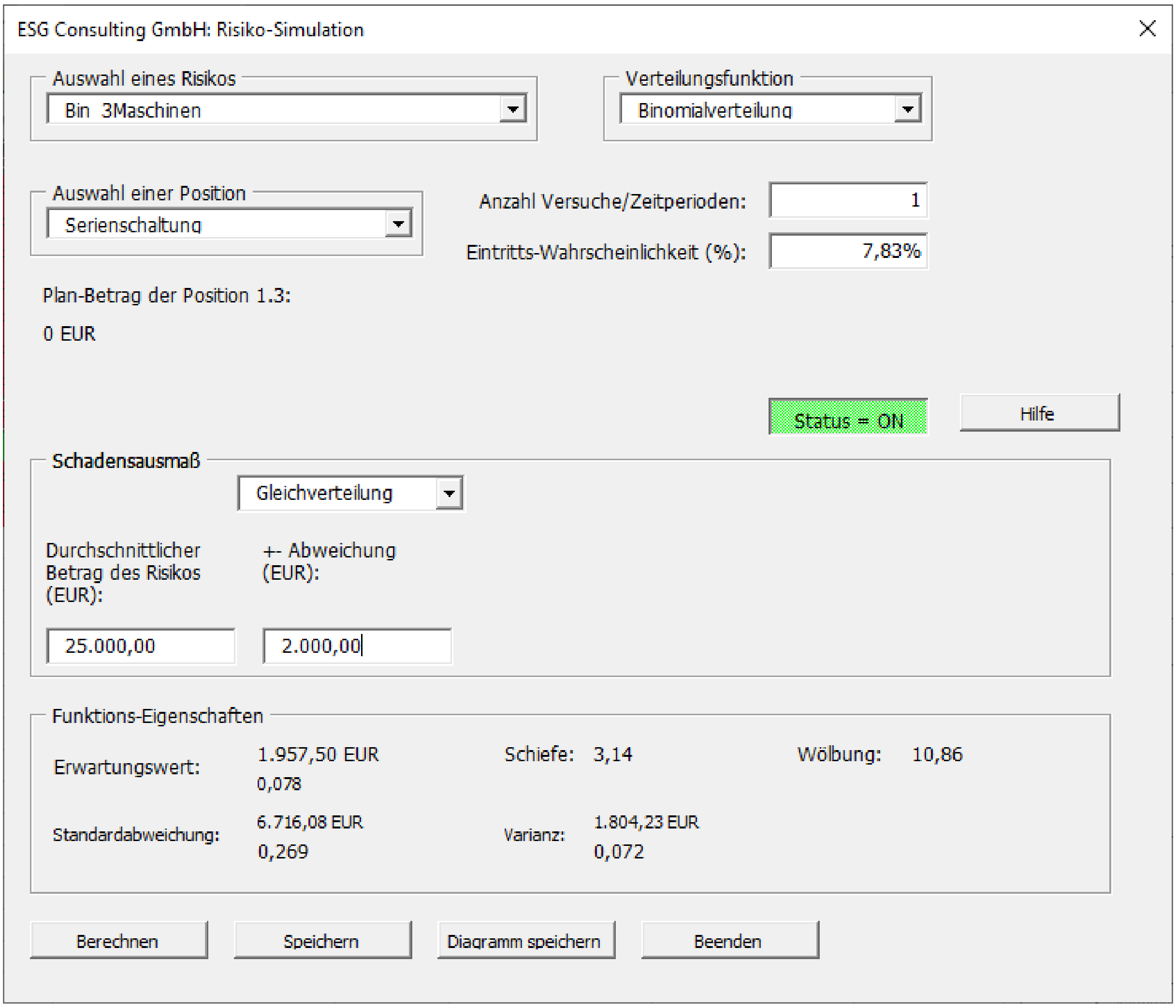


Abbildung 21: Cluster von 3 in Serie geschalteten Komponenten mit einer Gesamtverfügbarkeit von 92,17%

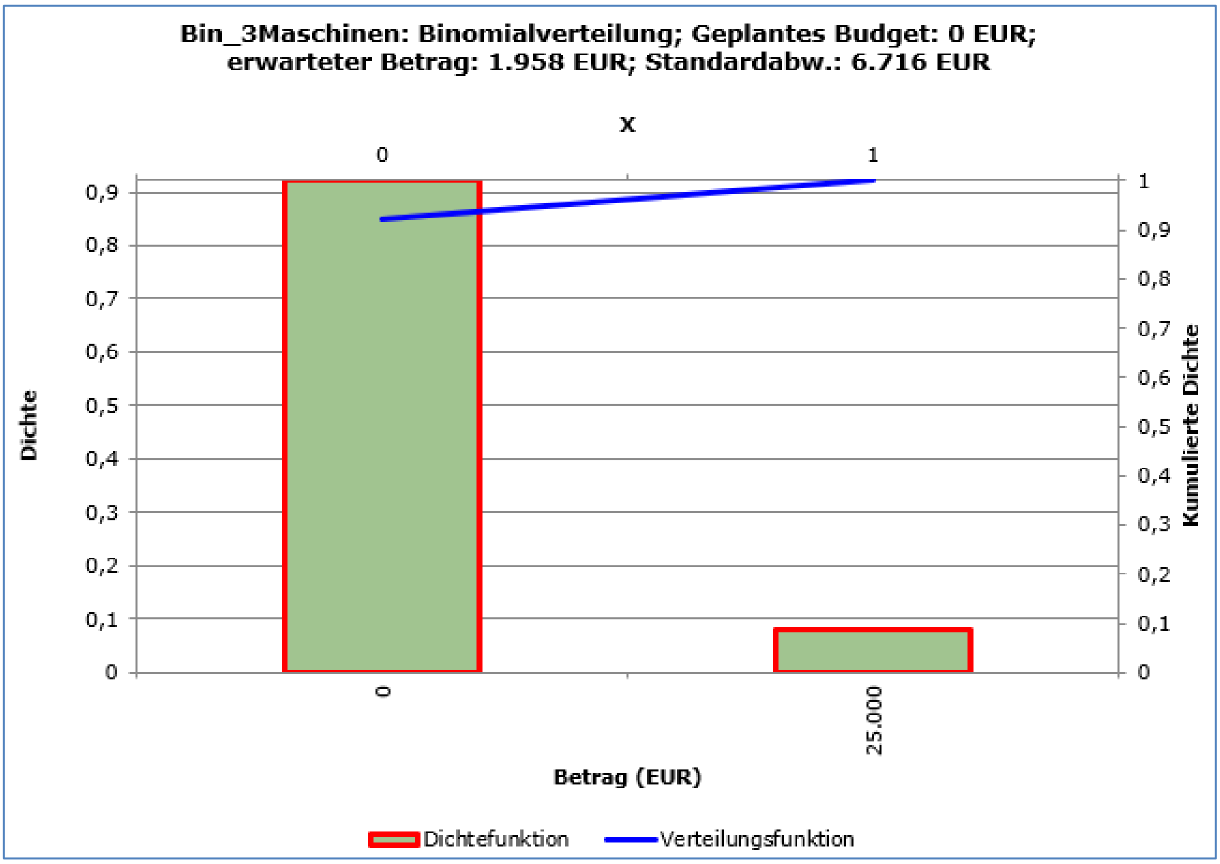


Abbildung 22: Zähldichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von Bin(1; 0,783)

Möchte man zusätzlich zu dem Schaden bei Gesamtausfall der Serienschaltung (bei nur einem Maschineausfall steht die gesamte Serienschaltung nicht mehr zur Verfügung) die Höhe des Schadens der einen ausgefallenen Maschine berücksichtigen, so kann man hierfür die Diskrete Verteilung benutzen.

Die gesamte Serienschaltung steht in diesem Beispiel zu 92,17% zur Verfügung. Bei 7,83% Nichtverfügbarkeit entsteht durch den Gesamtausfall ein Schaden (z.B. entgangener Umsatz) in Höhe von 25.000 EUR ± 2.000 EUR. Fällt eine Maschine aus, so entstehen dadurch Kosten für die ausgefallene Maschine, z.B. defekte Festplatte, Kabelbruch. Defektes Modul). Der entstandene Schaden an der Maschine lässt sich nur im Durchschnitt z.B. aus Erfahrungswerten bestimmen. Bei der Diskreten Verteilung würden für 3 Maschinen 4 diskrete Werte definiert werden. Der vierte Wert hat die Wahrscheinlichkeit

$$100\% - NV_{Komp1} – NV_{Komp2} – NV_{Komp3}) = 100\% - 1\% - 2\% - 5\% = 92\%$$

und den Schaden in Höhe von 0% (wenn keine Maschine ausfällt, so entsteht auch kein unmittelbarer Schaden an einer Maschine).

In der Modellierung des Risikos mit der Diskreten Verteilung müssen in MC-ECO 4 Schätzungen definiert werden. Die Schätzung mit 92% bekommt den Schadenswert 0 EUR zugewiesen.

Komponente	Ausfallwahrscheinlichkeit	Schadenhöhe
1	1 %	3.000 EUR
2	2 %	2.000 EUR
3	5 %	1.000 EUR
4	92 % (kein Maschinenausfall)	0 EUR
Gesamtschaltung	7,83%	Ist im Risiko mit der Binomialverteilung enthalten

Tabelle 4: Werte für die Diskrete Verteilung für den Ausfall von einer von 3 Maschinen

(Risiko 10 im Szenario MaschinenSchaden.xlsx):

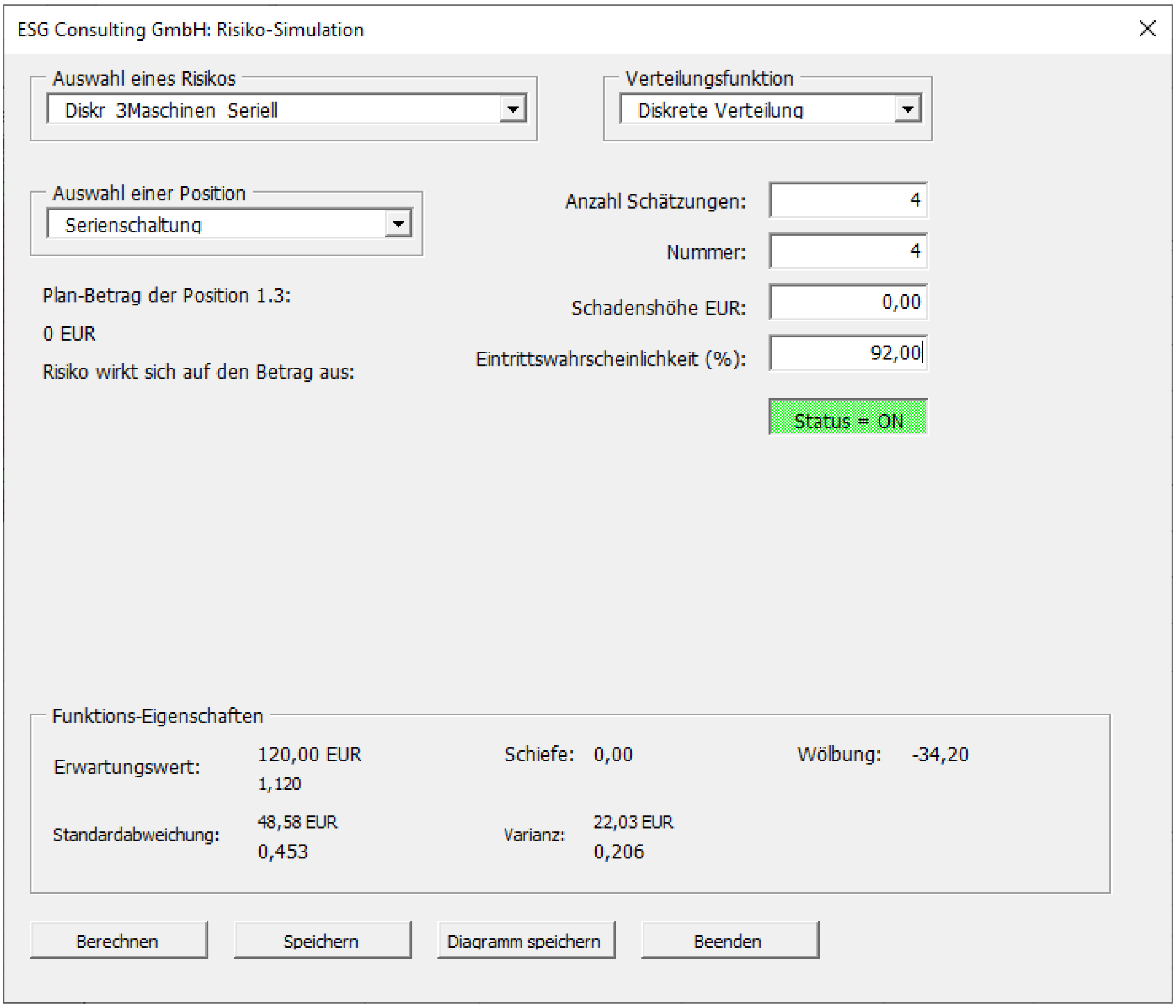


Abbildung 23:Modellierung der Diskreten Verteilung von 3 Maschinen

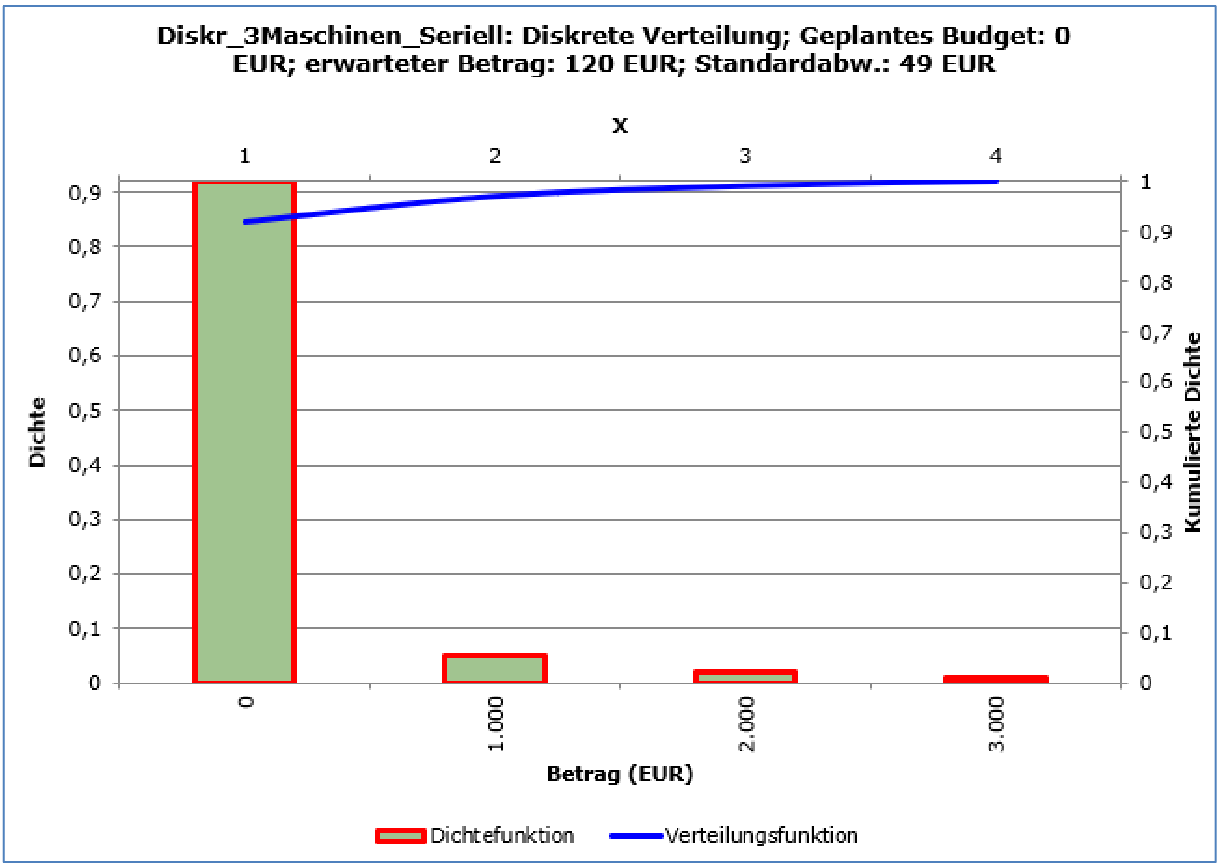


Abbildung 24: Diskrete Verteilung mit Schadenverteilung von 3 Maschinen in Serie geschalten

Jedes solches Cluster kann in dieser Art als Risiko formuliert und jeweils der gleichen Sub-Position - in diesem Fall der Sub-Position "Serienschaltung" - zugewiesen werden. In der Monte-Carlo-Simulation werden die simulierten Schadenbandbreiten der diskreten Verteilungen (wie. z.B. die Binomialverteilung und Diskrete Verteilung) im berechneten Wert der jeweiligen Sub-Position dazu addiert.

Bevor man mit diesem Szenario der Serienschaltung eine Simulation startet, müssen die beiden Risiken (Nr. 9 und 10) auf den Status „ON" gesetzt sein.

Die Monte-Carlo-Simulation ergibt:

Position Serienschaltung						
Planwert:	0 €	Wahrscheinlichkeit	Differenz (abs)	Differenz (%)	Variations-Koeffizie	3,17
Bei Konfidenz: 20%	75 €	20,00%	75 €		Std-Abweichung:	6.888 €
Wahrscheinlichster Wert:	675 €	84,54%	675 €		Schiefe:	3,04
Erwartungswert:	2.172 €	90,68%	2.172 €		Wölbung:	10,33
Value At Risk:	26.114 €	98,00%	26.114 €			

			Plan	Erwartungswert	Std-Abweichung
1	1.1	Maschinen-Schaden	0 €	2.172 €	6.888 €
	1.2	außerordentl. Aufwand	0 €	0 €	0 €
	1.3	Serienschaltung	0 €	2.172 €	6.888 €

Der erwartete Schaden pro Jahr ergäbe einen Wert von 2.272 EUR. Dieser Wert wird in 90,68% der Fälle unterschritten.

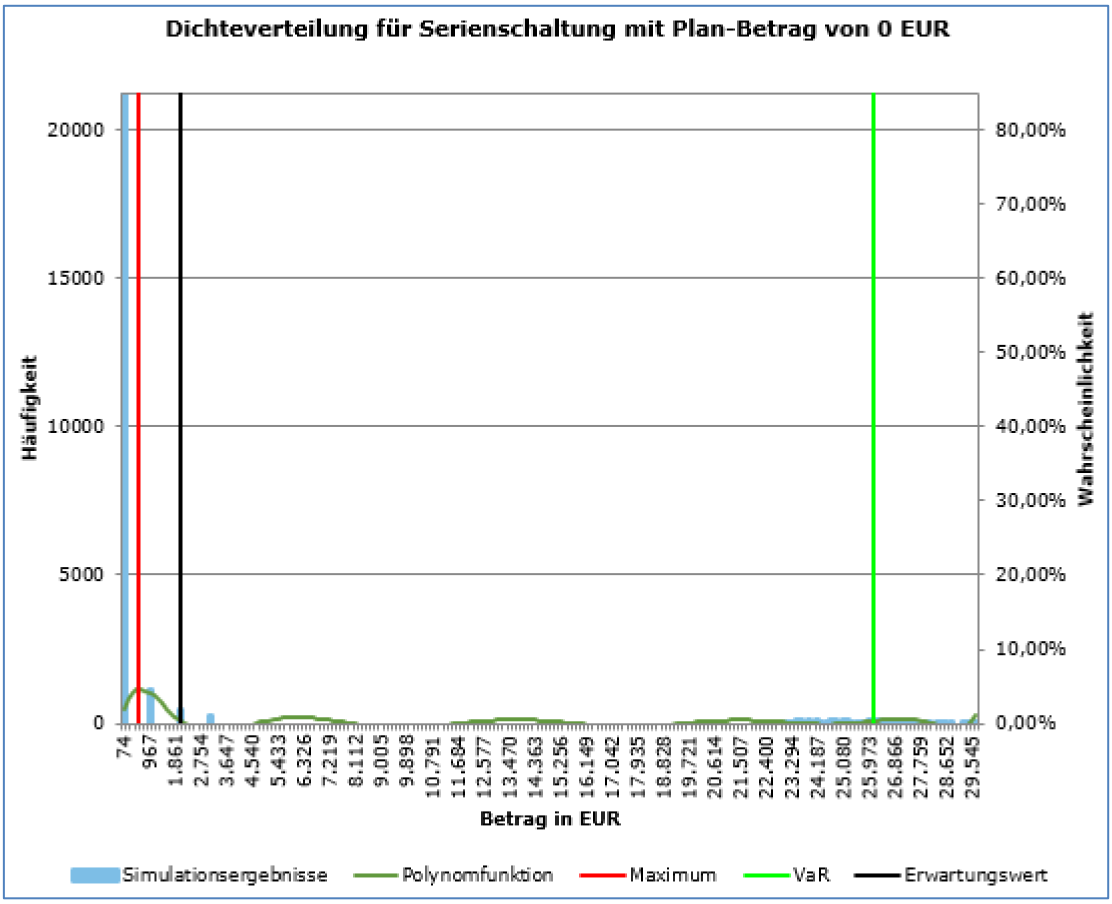


Abbildung 25: Dichteverteilung für die Serienschaltung (Berechnung mit 5.000 Simulations-Durchläufen)

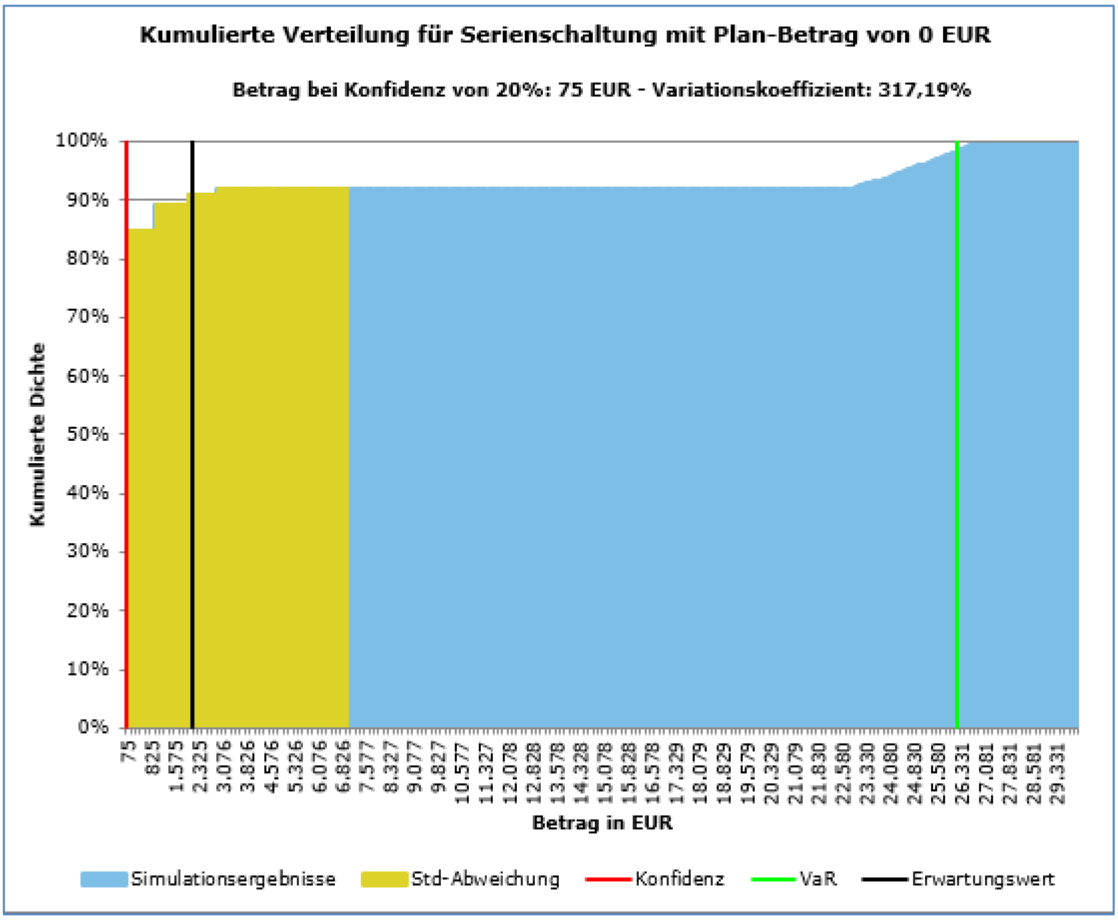


Abbildung 26: Kumulierte Verteilung der Serienschaltung bestehend aus 3 Maschinen

4.3.2 Parallel-Schaltung

In diesem Beispiel soll ein Pool, bestehend aus 4 z.B. Application-Servern, bzgl. der Schadenhöhe bei Ausfall von Servern modelliert werden.

Folgende Annahmen zum Ausfall der 4 Server pro Jahr werden getroffen:

Server	Ausfallwahrscheinlichkeit	Reparaturhöhe
1	20 %	1.000 EUR
2	10 %	2.000 EUR
3	5%	3.000 EUR
4	1 %	4.000 EUR
5	64 % (keine Maschine fällt aus)	0 EUR

Tabelle 5: Werte für die Diskrete Verteilung für den Ausfall von einer von 4 Maschinen

Der jeweilige Schaden beinhaltet die Reparatur/den Ersatz einer Komponente des jeweiligen Servers.

Die Nicht-Verfügbarkeit des Server-Pools berechnet sich entspr. Kap. 4.2.2 zu 0,001%, die Verfügbarkeit des Gesamtsystems sind somit 99,999%. Nur wenn alle 4 Server zusammen ausfallen, entsteht ein Gesamtschaden in Höhe von 25.000 EUR ± 2.000 EUR.

Wenn ein Server ausfällt, dann wird die Last auf die verbleibenden 3 Server verteilt. Entsprechend verhält es sich, wenn 2 oder 3 Server gleichzeitig ausfallen. Bei 2 gleichzeitigen Ausfällen muss die Last auf die beiden verbleibenden Server verteilt werden, bei 3 gleichzeitigen Ausfällen steht nur noch 1 Server zur Verfügung. Entsprechend hoch können die Schäden sein, wenn nämlich nicht mehr die gesamte Last durch die verbleibenden Server abgedeckt werden kann. Da man nicht bestimmen kann, welche Typen von Servern gleichzeitig ausfallen könnten, sei hier angenommen, dass immer die Server mit der jeweils höchsten Ausfallrate gemeinsam ausfallen werden. Die Schadenhöhen in der folgenden Tabelle sind nur exemplarisch zu sehen.

Gleichzeitiger Ausfall von x Servern	Ausfallwahr-scheinlichkeit	Schaden	Bemerkung
1	20 %	0 EUR	Die gesamte Last kann auf die restlichen 3 Server verteilt werden
2	2 %	1.000 EUR	(1-80%)*(1-90%)
3	0,1 %	7.500 EUR	(1-80%)*(1-90%)*(1-95%)
4	0,001 %	25.000 EUR	(1-80%)*(1-90%)*(1-95%)*(1-99%)
0	77,899 %	0 EUR	100% - 20% - 2% - 0,1% - 0,001%

Tabelle 6: kombinierte Ausfallwahrscheinlichkeiten bei Parallel-Schaltung

Mit dieser Konstellation, dass nämlich die 4 Server unterschiedliche Ausfallwahrscheinlichkeiten haben, müssten 2 Risiken wie folgt modelliert werden:

- Diskrete Verteilung für die 4 unterschiedlichen Reparaturkosten
- Diskrete Verteilung für die 5 unterschiedlichen Folge-Schäden (hier Lastausgleich, der ab 2 gleichzeitigen Serverausfällen zu unterschiedlichen Folgeschäden führen würde).

Hätten alle 4 Server die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit, könnten die beiden Risiken mit der Diskreten Verteilungsfunktion zusammengelegt werden, und der Schaden würde sich aus den Reparaturkosten und dem nicht kompensierbaren Lastausgleich zusammensetzen.

Eine weitere Möglichkeit wäre, den Gesamtausfall als Binomialverteilung mit einer Schadensbandbreite zu modellieren. Hiermit hätten wir 3 Risiken:

- Binomialverteilung für den Gesamtausfall des Pools (25.000 EUR ± 2.000 EUR)
- Diskrete Verteilung für die 4 unterschiedlichen Reparaturkosten
- Diskrete Verteilung für die 4 unterschiedlichen Folge-Schäden (hier Lastausgleich, der ab 2 gleichzeitigen Serverausfällen zu unterschiedlichen Folgeschäden führen würde).

Gleichzeitiger Ausfall von x Servern	Ausfallwahr-scheinlichkeit	Schaden / Reparaturkosten	Bemerkung
1	20 %	0 EUR	Die gesamte Last kann auf die restlichen 3 Server verteilt werden
2	2 %	1.000 EUR	(1-80%)*(1-90%)
3	0,1 %	7.500 EUR	(1-80%)*(1-90%)*(1-95%)
0	77,9 %	0 EUR	100% - 20% - 2% - 0,1%

Tabelle 7: kombinierte Ausfallwahrscheinlichkeiten bei Parallel-Schaltung für Diskret-Verteilung

Zur Modellierung in MC-ECO soll das erste Beispiel mit 2 Risiken, jeweils mit Diskreter Verteilungsfunktion, dargelegt werden.

(Risiko 11 im Szenario MaschinenSchaden.xlsx) mit den Werten aus Tabelle 6 :

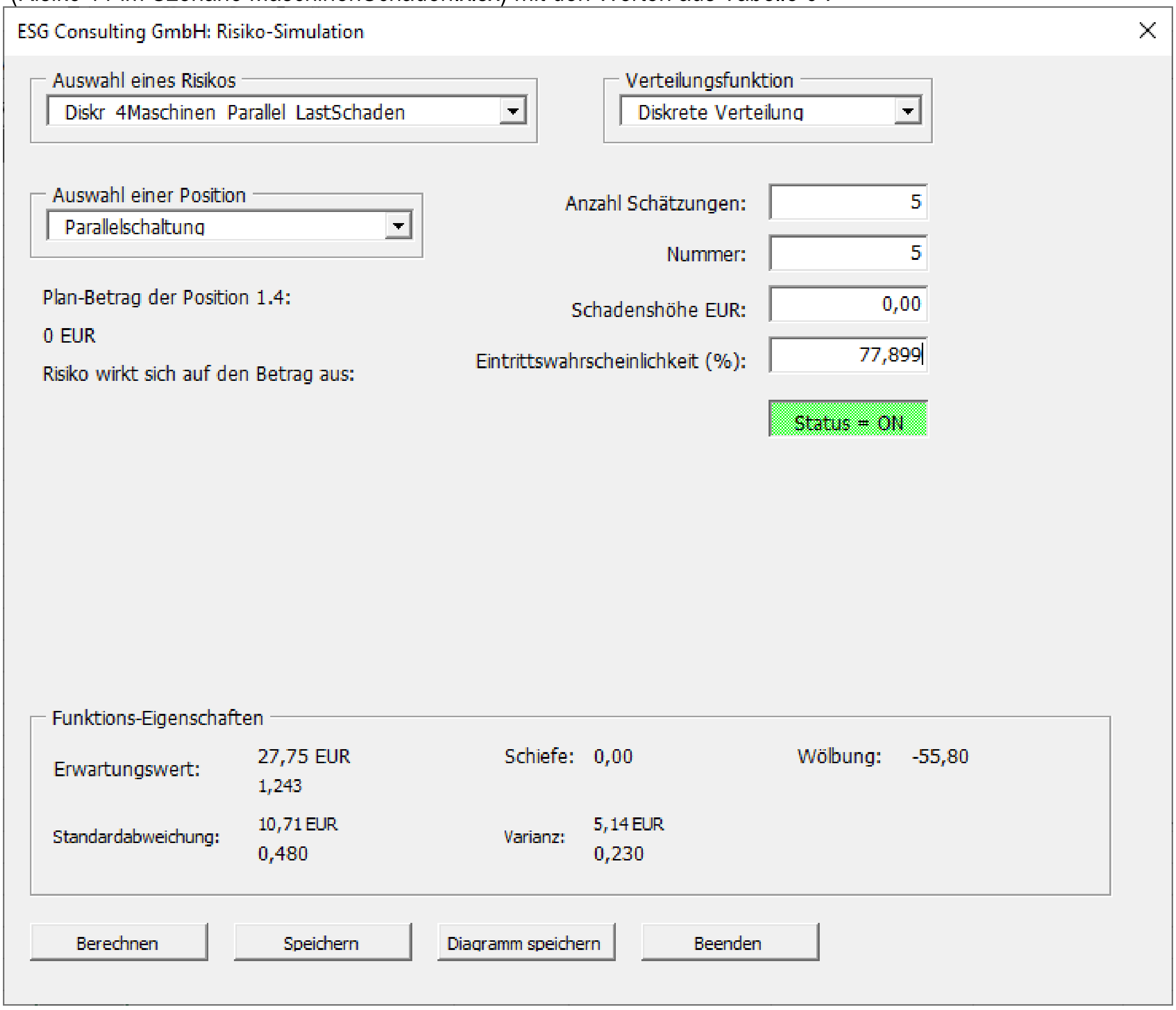


Abbildung 27: Cluster von 4 parallel geschalteten Servern mit einer Gesamtverfügbarkeit von 99,999%:

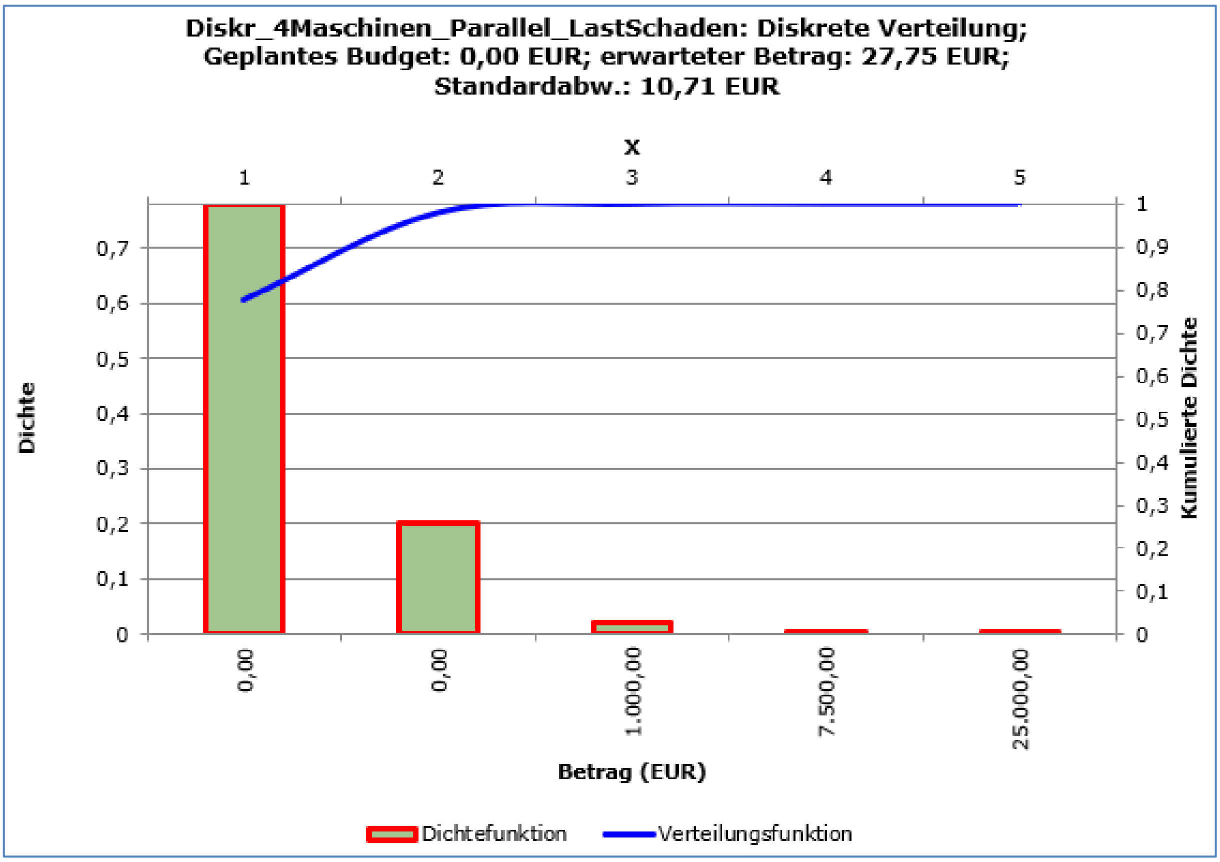


Abbildung 28: Diskrete Verteilung mit Schadenverteilung von 4 Maschinen parallel geschalten

Und nun die Reparaturkosten-Verteilung für die 4 Maschinen:

(Risiko 12 im Szenario MaschinenSchaden.xlsx) mit den Werten aus Tabelle 7:

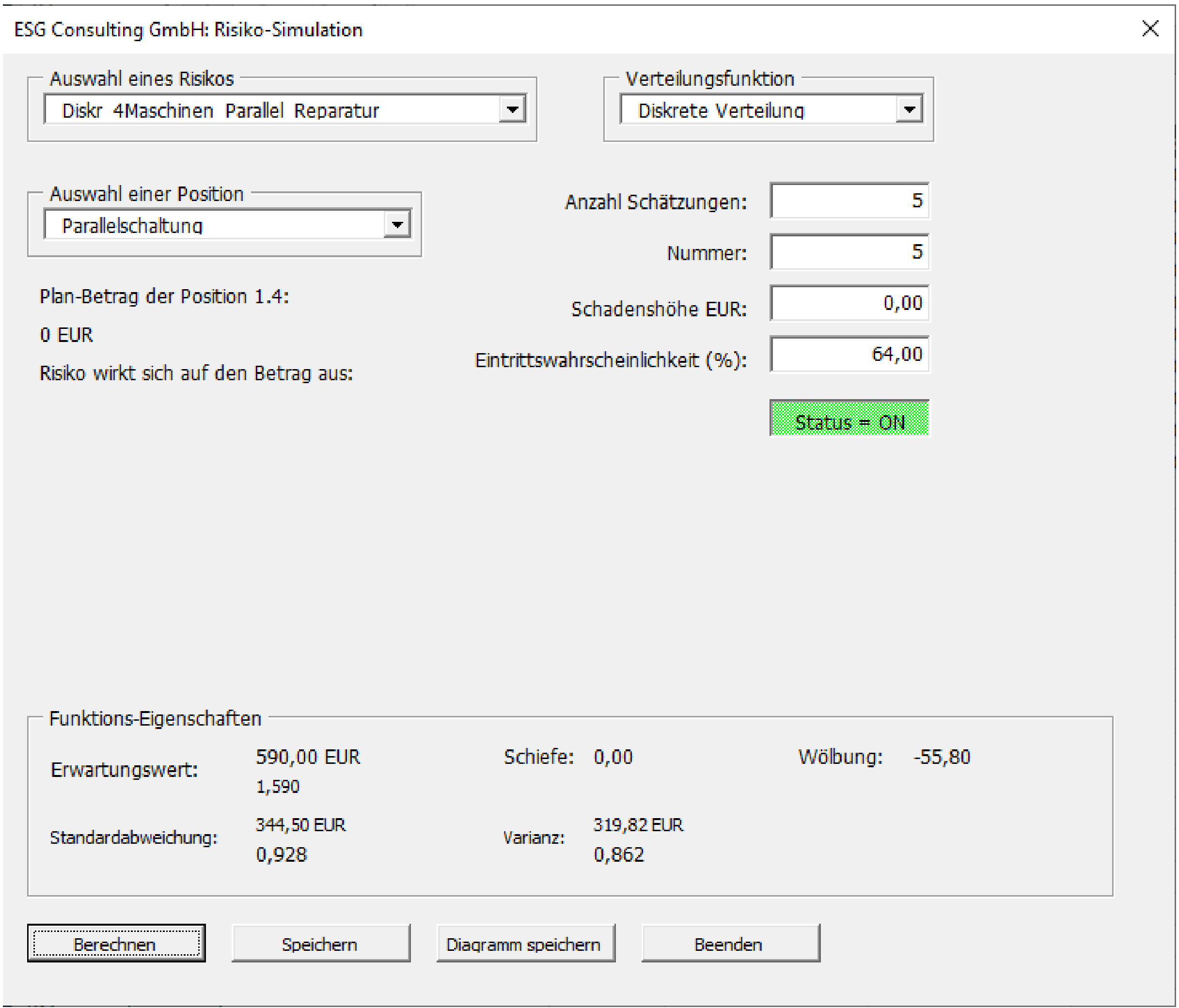


Abbildung 29: Verteilung der Reparaturkosten der 4 Server im Pool

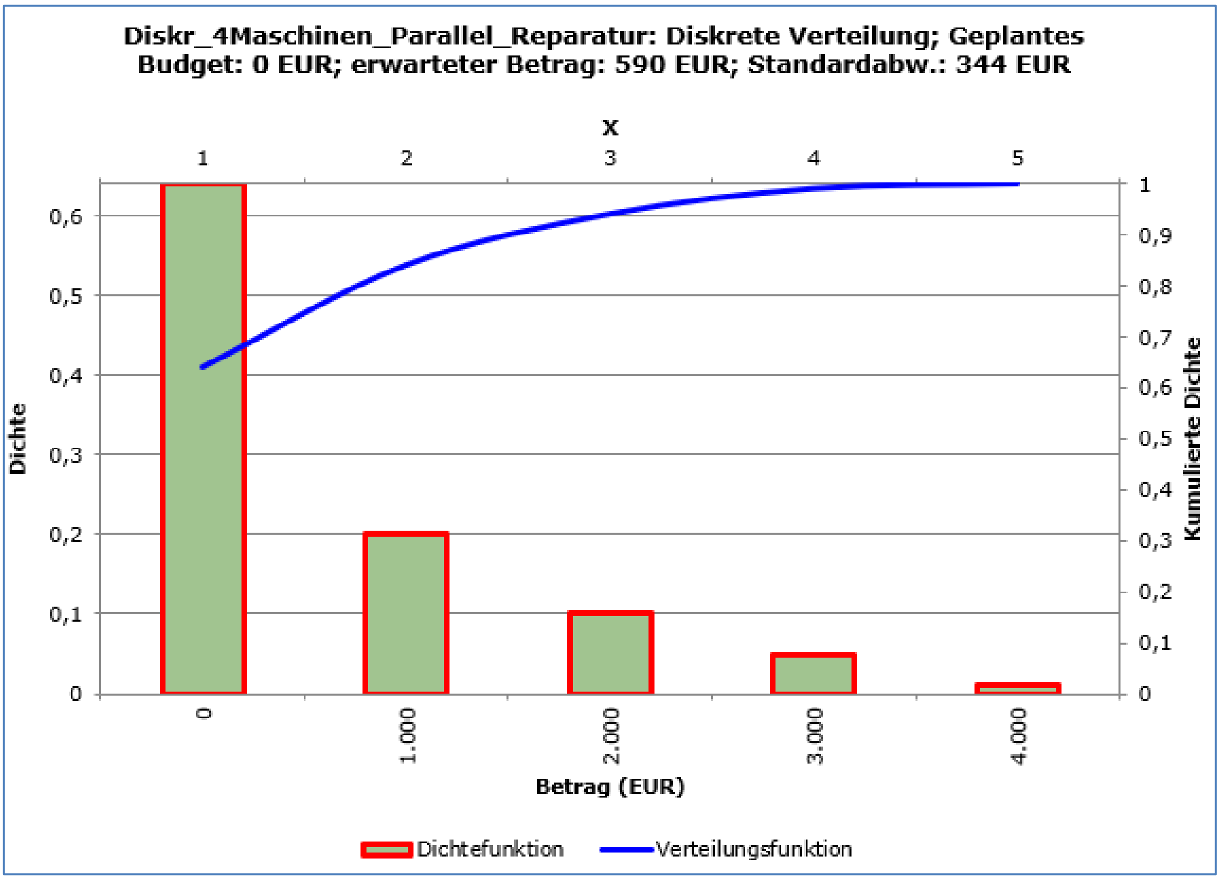


Abbildung 30: Diskrete Verteilung der Reparaturkosten von 4 Maschinen parallel geschalten

Jedes solches Cluster kann in dieser Art als Risiko formuliert und jeweils der gleichen Sub-Position - in diesem Fall der Sub-Position "Parallelschaltung" - zugewiesen werden. In der Monte-Carlo-Simulation werden die simulierten Schadenbandbreiten der diskreten Verteilungen (wie. z.B. die Binomialverteilung und Diskrete Verteilung) im berechneten Wert der jeweiligen Sub-Position dazu addiert.

Bevor man mit diesem Szenario der Parallelschaltung eine Simulation startet, müssen die beiden Risiken (Nr. 11 und 12) auf den Status „ON" gesetzt sein.

Da die Wahrscheinlichkeit für einen Gesamtausfall bei 0,001% liegt, ist es angebracht, die Anzahl der Simulationen in MC-ECO über das Haupt-Menu „Konfiguration" auf mindestens 20.0000 zu konfigurieren.

Die Monte-Carlo-Simulation ergibt:

Position Parallelschaltung						
Planwert:	0 €	Wahrscheinlichkeit	Differenz (abs)	Differenz (%)	Variations-Koeffizie	1,60
Bei Konfidenz: 20%	1.032 €	20,00%	1.032 €		Std-Abweichung:	992 €
Wahrscheinlichster Wert:	774 €	62,80%	774 €		Schiefe:	2,65
Erwartungswert:	621 €	62,80%	621 €		Wölbung:	30,83
Value At Risk:	3.004 €	98,00%	3.004 €			

Der erwartete Schaden pro Jahr ergäbe einen Wert von 621 EUR. Dieser Wert wird in 62,8% der Fälle unterschritten. In 98% der Fälle wird der Schaden in Höhe von 3.004 EUR pro Jahr unterschritten.

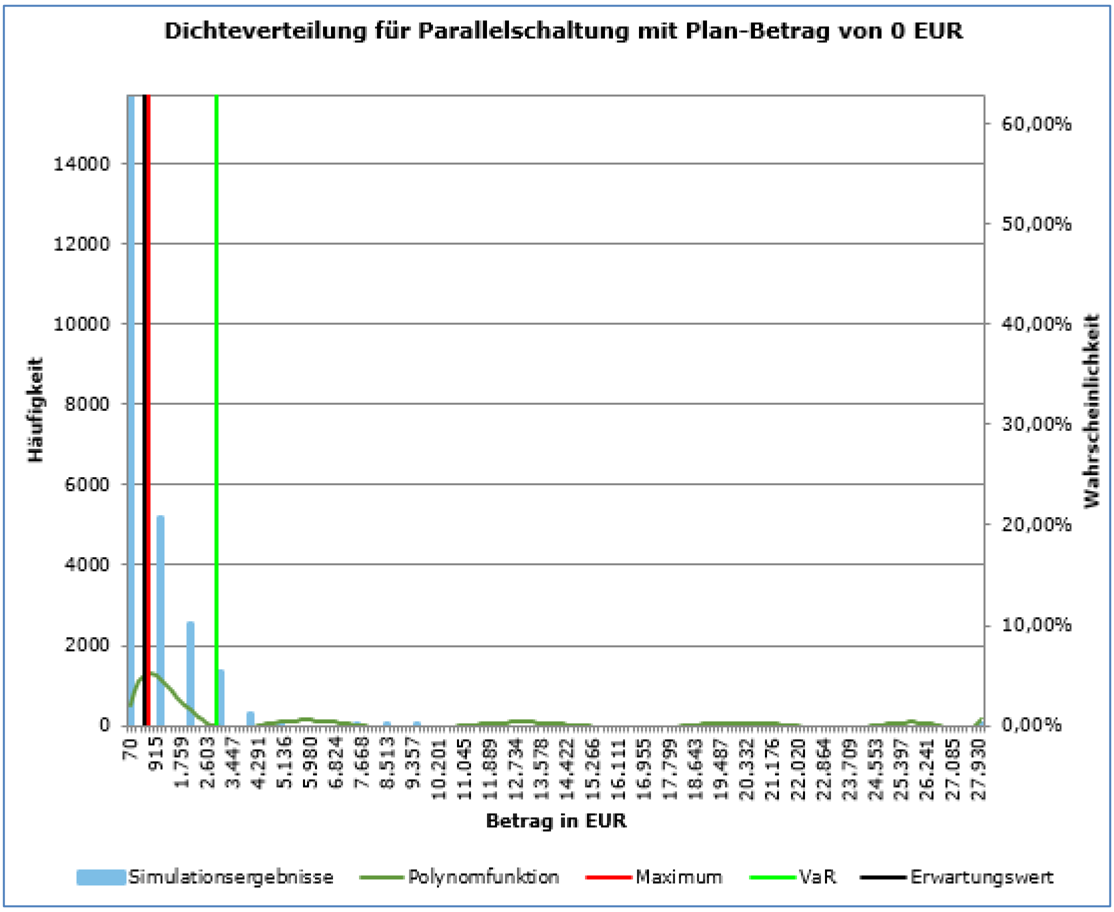


Abbildung 31: Dichteverteilung für die Parallelschaltung (Berechnung mit 15.000 Simulations-Durchläufen)

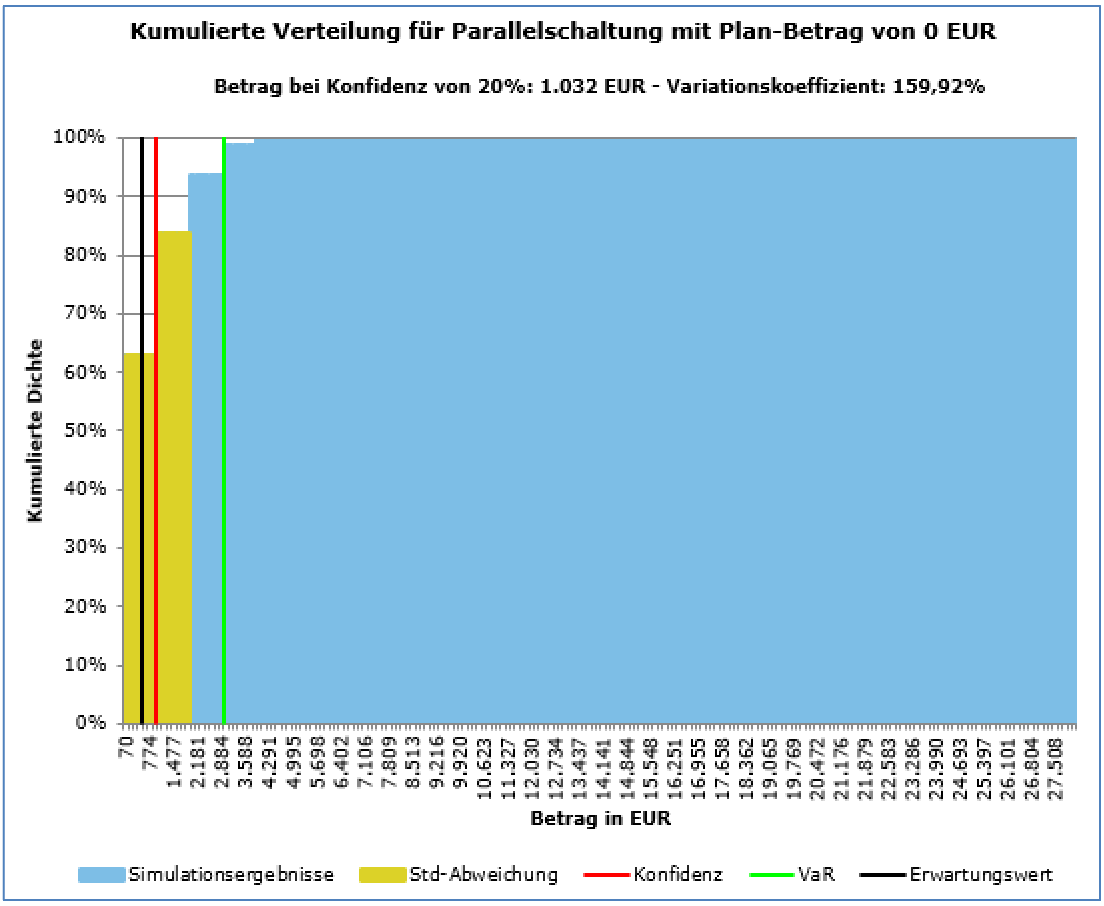


Abbildung 32: Kumulierte Verteilung der Parallelschaltung bestehend aus 4 Maschinen

5. Abkürzungen

Abkürzung	Beschreibung
α	Schadenintensität für den Zeitraum der Länge u (Anzahl Zeitperioden)
λ	Intensitätsparameter
Bin	Binomialverteilung
MC-ECO	Monte-Carlo-Simulations-Tool der ESG Consulting GmbH
MCS	Monte-Carlo-Simulation
MTBF	Mean Time Between Failure; mittlere ausfallfreie Zeit eines Systems
MTTR	Mean Time to Repair; mittlere Dauer für die Wiederherstellung nach einem Ausfall
Pois	Poisson-Verteilung

Tabelle 8: Abkürzungen